9.4.1 Sollecitazioni e tensioni

ESERCIZIO SVOLTO

La trave in legno con sezione 25 × 35 cm² riportata in **figura** è gravata di quattro carichi concentrati:

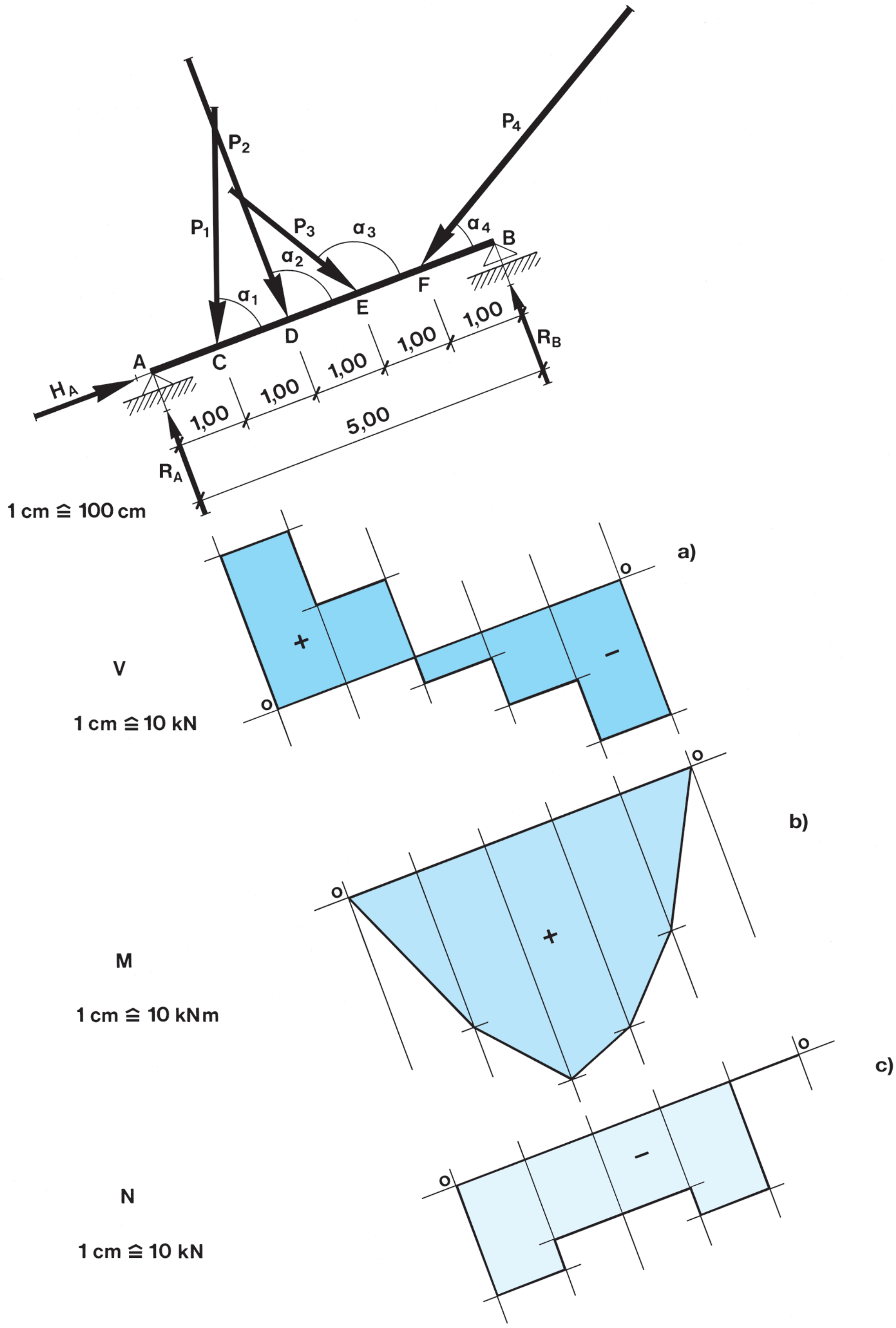
$P_1 = 12$ kN $P_2 = 15$ kN $P_3 = 8$ kN $P_4 = 18$ kN

le cui linee di azione formano con l'asse della trave rispettivamente gli angoli:

$\alpha_1 = 70°$ $\alpha_2 = 90°$ $\alpha_3 = 120°$ $\alpha_4 = 30°$

Si richiede:

- calcolo delle reazioni vincolari;
- calcolo delle sollecitazioni di taglio, momento flettente e sforzo normale;
- tracciamento dei relativi diagrammi;
- calcolo delle tensioni normali e tangenziali.



9.4.1 Sollecitazioni e tensioni

1. Scomposizione dei carichi

$P_{1-x} = P_1 \cdot \cos\alpha_1 = 12 \cdot \cos 70° \approx 4{,}10 \text{ kN}$

$P_{3-x} = P_3 \cdot \cos\alpha_3 = 8 \cdot \cos 120° = 4{,}00 \text{ kN}$

$P_{4-x} = P_4 \cdot \cos\alpha_4 = 18 \cdot \cos 30° \approx 15{,}59 \text{ kN}$

$P_{1-y} = P_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 = 12 \cdot \text{sen}\,70° \approx 11{,}28 \text{ kN}$

$P_{3-y} = P_3 \cdot \text{sen}\,\alpha_3 = 8 \cdot \text{sen}\,120° \approx 6{,}93 \text{ kN}$

$P_{4-y} = P_4 \cdot \text{sen}\,\alpha_4 = 18 \cdot \text{sen}\,30° \approx 9{,}00 \text{ kN}$

2. Calcolo delle componenti di reazione vincolare

$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0}$

$H_A - P_{1-x} + P_{3-x} - P_{4-x} = 0$

$H_A = P_{1-x} - P_{3-x} + P_{4-x} = 4{,}10 - 4{,}00 + 15{,}59 = +\,15{,}69 \text{ kN}$

$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0}$

$R_A + R_B - P_{1-y} - P_2 - P_{3-y} - P_{4-y} = 0$

$R_A + R_B = P_{1-y} + P_2 + P_{3-y} + P_{4-y} = 11{,}28 + 15{,}00 + 6{,}93 + 9{,}00 = 42{,}21 \text{ kN}$

$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0}$

$R_A \cdot 5{,}00 - P_{1-y} \cdot 4{,}00 - P_2 \cdot 3{,}00 - P_{3-y} \cdot 2{,}00 - P_{4-y} \cdot 1{,}00 = 0$

$$R_A = \frac{11{,}28 \times 4{,}00 + 15{,}00 \times 3{,}00 + 6{,}93 \times 2{,}00 + 9{,}00 \times 1{,}00}{5{,}00} = \frac{112{,}98}{5{,}00} \approx 22{,}60 \text{ kN}$$

$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$

$-R_B \cdot 5{,}00 + P_{1-y} \cdot 1{,}00 + P_2 \cdot 2{,}00 + P_{3-y} \cdot 3{,}00 + P_{4-y} \cdot 4{,}00 = 0$

$$R_B = \frac{11{,}28 \times 1{,}00 + 15{,}00 \times 2{,}00 + 6{,}93 \times 3{,}00 + 9{,}00 \times 4{,}00}{5{,}00} \approx 19{,}61 \text{ kN}$$

Verifica

$22{,}60 + 19{,}61 = 42{,}21 \text{ kN}$

$42{,}21 \text{ kN} = 42{,}21 \text{ kN}$

3. Calcolo della sollecitazione di sforzo di taglio [fig. a]

$V_A = 0$ $\quad V'_A = R_A = 22{,}60 \text{ kN}$

$V_C = V'_A = 22{,}60 \text{ kN}$ $\quad V'_C = V_C - P_{1-y} = 22{,}60 - 11{,}28 = 11{,}32 \text{ kN}$

$V_D = V'_C = 11{,}32 \text{ kN}$ $\quad V'_D = V_D - P_2 = 11{,}32 - 15{,}00 = -\,3{,}68 \text{ kN}$

$V_E = V'_D = -\,3{,}68 \text{ kN}$ $\quad V'_E = V_E - P_{3-y} = -\,3{,}68 - 6{,}93 = -\,10{,}61 \text{ kN}$

$V_F = V'_E = -\,10{,}61 \text{ kN}$ $\quad V'_F = V_F - P_{4-y} = -\,10{,}61 - 9{,}00 = -\,19{,}61 \text{ kN}$

$V_B = V'_F = -\,19{,}61 \text{ kN}$ $\quad V'_B = V_B + R_B = -\,19{,}61 + 19{,}61 = 0$

Lo sforzo di taglio si annulla nella sezione D ove si verifica il massimo momento flettente.

4. Calcolo della sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_C = R_A \cdot 1{,}00 = 22{,}60 \times 1{,}00 = 22{,}60 \text{ kN m}$$

$$M_D = M_{\max} = R_A \cdot 2{,}00 - P_{1-y} \cdot 1{,}00 = 22{,}60 \times 2{,}00 - 11{,}28 \times 1{,}00 = 33{,}92 \text{ kN m}$$

$$M_E = R_B \cdot 2{,}00 - P_{4-y} \cdot 1{,}00 = 19{,}61 \times 2{,}00 - 9{,}00 \times 1{,}00 = 30{,}22 \text{ kN m}$$

$$M_F = R_B \cdot 1{,}00 = 19{,}61 \times 1{,}00 = 19{,}61 \text{ kN m}$$

5. Calcolo della sollecitazione di sforzo normale

$$N_A = 0 \qquad N'_A = H_A = -\,15{,}69 \text{ kN}$$

$$N_C = N'_A = -\,15{,}69 \text{ kN} \qquad N'_C = N_C + P_{1-x} = -\,15{,}69 + 4{,}10 = -\,11{,}59 \text{ kN}$$

$$N_E = N'_C = -\,11{,}59 \text{ kN} \qquad N'_E = N_E - P_{3-x} = -\,11{,}59 - 4{,}00 = -\,15{,}59 \text{ kN}$$

$$N_F = N'_E = -\,15{,}59 \text{ kN} \qquad N'_F = N_F + P_{4-x} = -\,15{,}59 + 15{,}59 = 0$$

La trave risulta compressa per tutto il tratto AF con un valore massimo di compressione di 15,69 kN nel tratto AC.

6. Calcolo delle tensioni

Tensione normale per presso-flessione

In corrispondenza del punto D, ove si verifica il momento massimo, lo sforzo di compressione ha una intensità di 11,59 kN, valore che si mantiene costante per tutto il tronco CE:

$$W_x = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \times 25 \times 35^2 \approx 5104{,}17 \text{ cm}^3$$

$$A = 25 \times 35 = 875 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = -\frac{N_D}{A} \mp \frac{M_{\max}}{W_x} = -\frac{11{,}59 \times 10^3}{875 \times 10^2} \mp \frac{33{,}92 \times 10^6}{5104{,}17 \times 10^3}$$

da cui:

$$\sigma^-_{\max} \approx -\,6{,}78 \text{ N/mm}^2 \qquad \sigma^+_{\max} \approx +\,6{,}51 \text{ N/mm}^2$$

Tensione tangenziale per flessione e taglio

$$S_x = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 25 \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{4} \approx 3828{,}13 \text{ cm}^3$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \times 25 \times 35^3 \approx 89\,322{,}92 \text{ cm}^4$$

Il calcolo viene effettuato per la sezione D dove si ha il momento massimo con un valore dello sforzo di taglio $V = 11{,}32$ kN:

$$\tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot b} = \frac{11{,}32 \times 10^3 \times 3828{,}13 \times 10^3}{89\,322{,}92 \times 10^4 \times 250} \approx 0{,}194 \text{ N/mm}^2$$