A3.4 LE TRAVATURE RETICOLARI

POLIGLOTTA
Travatura reticolare
GB: Truss
F: Poutre à croisillons
D: Fachwerkträger

RICHIAMO
Alcuni ***esempi di travature reticolari***: i tralicci utilizzati per il trasporto dell'energia elettrica; le strutture delle gru; le strutture di sostegno dei ponti in acciaio; la struttura reticolare più spettacolare e famosa, ovvero la Tour Eiffel di Parigi.

Le **travature reticolari** sono strutture complesse indeformabili, costituite da un insieme di **aste** collegate fra loro in punti detti **nodi**. Nelle rappresentazioni schematiche i nodi sono considerati come cerniere (per semplificare i calcoli e comunque a vantaggio della sicurezza). In realtà sono degli **incastri**, in quanto le aste sono collegate fra loro tramite bulloni, chiodi o saldatura.

I carichi che sollecitano la struttura sono applicati nei nodi, di conseguenza, ogni asta è sollecitata secondo la congiungente i suoi due nodi. Le **aste** si definiscono **tese** quando sono sollecitate a sforzo di **trazione**; **compresse**, quando sono sollecitate a sforzo di **compressione**.

Osservazione: se un carico è applicato in un punto qualsiasi sull'asta, lo si può comunque considerare applicato nei nodi dell'asta; basta scomporlo in due componenti applicate nei due nodi.

Le travature reticolari possono essere **piane** o **spaziali**. In questa trattazione si considerano solo quelle piane, cioè aventi le aste in un piano contiene anche le forze.

Fra i vari modi in cui è possibile collegare più aste per formare una figura chiusa, il più semplice e interessante è il **collegamento a triangolo** (▸ *Fig. 3.20*).

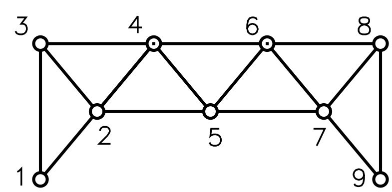


Fig. 3.20
Travatura reticolare isostatica con 15 aste e 9 nodi.

Si hanno tre aste non allineate che collegano tre nodi; per collegare un altro nodo al triangolo di partenza (1-2-3) occorrono altre due aste non allineate (2-4 e 3-4); la costruzione continua così fino a esaurimento dei collegamenti fra i vari nodi.

Se si indica con a il numero di aste e con n il numero di nodi, il numero minimo di aste necessarie per collegare n nodi così da ottenere una **struttura isostatica**, o **strettamente indeformabile**, è dato da:

$$a = 2n - 3 \qquad \textbf{[3.8]}$$

Nel triangolo di partenza, infatti, si hanno tre aste che collegano tre nodi; il numero di aste per collegare i rimanenti $(n - 3)$ nodi è dato da $2(n - 3)$, quindi si avranno in totale:

$$3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

che rappresenta il numero delle aste da utilizzare per collegare n nodi.

Se il numero di aste è superiore a quello minimo dato dalla [*3.8*], la **struttura** è **iperstatica**, o *ad aste sovrabbondanti*; se è minore, la **struttura** è **labile** o *deformabile*.

POLIGLOTTA
Tirante
GB: Tie
F: Tirant
D: Spannstange

POLIGLOTTA
Puntone
GB: Strut
F: Arbalétrier
D: Druckstab

Calcolo degli sforzi nelle aste

Lo studio di una **travatura reticolare** consiste nella determinazione degli **sforzi** che si hanno **nelle aste**, a causa dei carichi esterni applicati alla struttura. Poiché i carichi si considerano applicati nei nodi e i nodi si considerano come cerniere, lo studio si semplifica e le aste si considerano sottoposte a **trazione** o a **compressione**. Le aste sottoposte a trazione sono dette **tiranti**; quelle sottoposte a compressione sono dette **puntoni**. Attraverso le equazioni della Statica, applicate a ciascun nodo, si potrebbe determinare lo sforzo nelle aste, ma sarebbe un procedimento piuttosto laborioso; è preferibile pertanto utilizzare dei procedimenti di ricerca più adatti, come il metodo grafico di Culmann, il metodo analitico di Ritter, il metodo grafico dell'equilibrio ai nodi o il poligono di Cremona. Sarà esposto di seguito, sotto forma di esempio, il **metodo di Ritter**.

Metodo di Ritter
Data la travatura rappresentata nella *figura 3.21*, determinare gli sforzi nelle aste 2, 3, 4, sapendo che: $F_1 = F_3 = 30$ daN; $F_2 = 60$ daN; $l = 8$ m; $\alpha = 45°$.

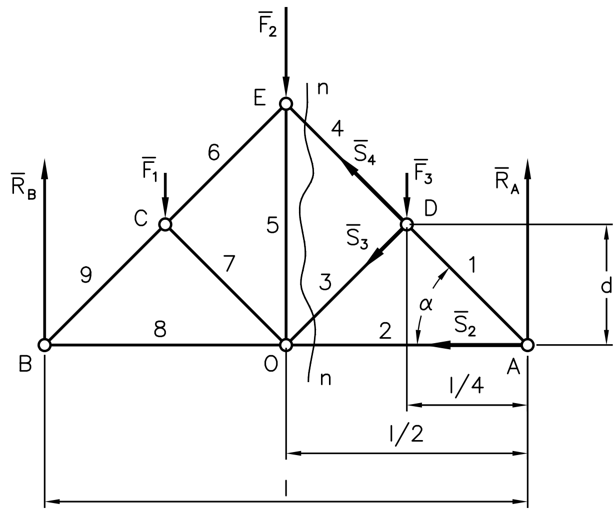


Fig. 3.21
Determinazione degli sforzi nelle aste di una travatura reticolare con il metodo di Ritter: la linea di sezione *n-n* taglia tre aste non concorrenti e mette in evidenza i rispettivi sforzi S_2, S_3, S_4.

Soluzione
La struttura è in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne, applicate nei nodi, e delle reazioni vincolari. Effettuando una sezione ideale *n-n*, che taglia tre aste non concorrenti, la travatura viene divisa in due parti, ciascuna delle quali continua a essere in equilibrio sotto l'azione delle forze attive, reattive, e degli sforzi che l'altra parte della travatura reticolare trasmette lungo le aste tagliate, come prescritto dal principio di azione e reazione.

Si calcola l'intensità delle reazioni vincolari; poiché i carichi sono verticali e simmetrici, le reazioni sono verticali e hanno intensità:

$$R_A = R_B = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ daN}$$

Si calcola, in seguito, l'intensità degli sforzi nelle aste.

Si traccia la sezione *n-n* che taglia le aste 2, 3, 4 e si considera, per esempio, la parte di destra.

RICHIAMO
Avendo ipotizzato che le aste 2, 3 e 4 siano dei tiranti, i relativi sforzi S_2, S_3 e S_4 sono applicati ai loro nodi A e D con verso uscente.

Si indicano con S_2, S_3, S_4 gli sforzi nelle rispettive aste in esame, attribuendo i versi in modo da risultare, per esempio, dei tiranti. Per l'equilibrio, deve verificarsi che, rispetto a un punto qualunque del piano, il momento delle forze esterne attive e reattive, applicate alla parte di sinistra della travatura, dev'essere uguale e contrario alla somma dei momenti degli sforzi nelle tre aste tagliate rispetto allo stesso punto.

Per rendere il problema risolvibile, si assume uno dei nodi come punto, definito *polo*, rispetto cui calcolare il momento. Il polo dev'essere uno dei nodi in cui si incontrano due delle tre aste sezionate. Se i risultati degli sforzi nelle aste risultano positivi, il loro verso fissato inizialmente è corretto; se il risultato è negativo, gli sforzi avranno verso opposto.

Si calcolano gli sforzi nell'asta 2: si sceglie il polo D in cui si incontrano le aste 3 e 4, rispetto al quale S_1 e S_3 hanno momento nullo.

Dall'equazione di equilibrio dei momenti rispetto a D, si ottiene:

$$S_2\, d - R_A \frac{l}{4} = 0$$

quindi:

$$S_2 = R_A \frac{l}{4} \frac{1}{d}$$

Poiché:

$$d = \frac{l}{4} \text{tg } \alpha = \frac{8}{4} \text{tg } 45° = 2$$

si avrà:

$$S_2 = \frac{60 \times 2}{2} = 60 \text{ daN}$$

essendo positivo il valore trovato, l'asta 2 risulta, come ipotizzato, un tirante.

Si calcolano gli sforzi nell'asta 3: si sceglie il polo A in cui si incontrano le aste 2 e 4, rispetto al quale S_1 e S_2 hanno momento nullo.

Dall'equazione di equilibrio dei momenti si ottiene:

$$F_3 \frac{l}{4} + S_3\, \text{DA} = 0$$

da cui si ha:

$$S_3 = -F_3 \frac{l}{4} \frac{1}{\text{DA}}$$

Poiché:

$$\text{DA} = \frac{l}{4} \frac{1}{\cos \alpha} = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

sostituendo si ottiene:

$$S_3 = -30 \times 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = -15\sqrt{2} = -21{,}2 \text{ daN}$$

Dato che il valore di S_3 è negativo, il suo verso, ipotizzato in partenza, è da invertire, per cui l'asta 3 risulta un puntone poiché la forza è diretta verso il nodo.

Si calcolano gli sforzi nell'asta 4: il polo dei momenti è rappresentato dal nodo O in cui si incontrano le aste 2 e 3.

L'equazione dei momenti vale:

$$F_3 = \frac{l}{4} - R_A \frac{l}{2} - S_4 \, \mathrm{DO} = 0$$

Poiché:

$$\mathrm{DO} = \mathrm{DA} = 2\sqrt{2}$$

sostituendo si ha:

$$S_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(30 \times 2 - 60 \times 4) = -63{,}6 \text{ daN}$$

anche S_4 ha verso opposto a quello ipotizzato, per cui l'asta 4 risulta un puntone.

Il procedimento adottato viene ripetuto effettuando sulla travatura tutte le sezioni necessarie, considerandone una per volta, fino a prendere in esame tutte le aste.

Riduzione di un sistema di forze

Un qualsiasi sistema di forze è equivalente, dal punto di vista degli effetti prodotti, a un altro sistema formato dalla sua risultante, applicata in un punto P qualsiasi, e dal suo momento risultante calcolato rispetto allo stesso punto. Il sistema costituito dalla risultante e dal momento risultante si dice **sistema ridotto** a un punto P, che a sua volta prende il nome di **centro di riduzione**.

Esaminare il sistema ridotto, più semplice, di un sistema complesso di forze e di coppie di forze, facilita lo studio degli effetti generati sui corpi cui è applicato. L'operazione di **riduzione di un sistema a un punto** può risultare più agevole utilizzando il **teorema delle proiezioni**.

Equilibrio di un sistema di forze

Un **corpo** si dice **in equilibrio** quando è in equilibrio il sistema di forze a esso applicato.

Un **sistema di forze** applicato a un corpo è detto **in equilibrio** se l'applicazione o la rimozione contemporanea delle forze non ha alcun effetto sullo stato di moto o di quiete del corpo. Affermare che un corpo libero è in equilibrio o che un sistema di forze è in equilibrio è la stessa cosa. Un **corpo libero** soggetto a un sistema di forze complanari ha tre possibilità di movimento, tre **gradi di libertà**, e perché sia in equilibrio devono essere rispettate entrambe le **equazioni cardinali della Statica**: $R = 0$; $M_R = 0$. Esse corrispondono a due equazioni di equilibrio relative alla traslazione e una relativa alla rotazione. Un corpo libero di muoversi nello spazio ha sei gradi di libertà e quindi le equazioni cardinali della Statica sono tre equazioni di equilibrio relative alla traslazione e tre relative alla rotazione.

I corpi vincolati

Un **corpo rigido** si dice **vincolato** quando le sue possibilità di movimento sono impedite, in parte o completamente, dal contatto di altri corpi definiti **vincoli**; un corpo vincolato, pertanto, è posto in condizioni di equilibrio applicando un certo numero di vincoli. Lo studio dell'equilibrio dei corpi vincolati si effettua considerandoli corpi liberi sollecitati da un sistema di forze, costituito dalle **forze attive** (forze esterne) e dalle **reazioni vincolari**. L'equilibrio si consegue quando il sistema di forze, così definito, soddisfa le equazioni cardinali della Statica (▸ *Form. 3.1* e *3.2*). I **vincoli** possono essere ridotti ai seguenti tipi fondamentali: l'**appoggio**, che elimina un grado di libertà sia nel caso di forze spaziali sia nel caso di forze nel piano; la **cerniera**, che elimina due gradi di libertà ai corpi soggetti a forze complanari; la **cerniera sferica**, che elimina tre gradi di libertà ai corpi soggetti a forze spaziali; la **cerniera cilindrica**, che elimina quattro gradi di libertà ai corpi soggetti a forze spaziali; l'**incastro**, che elimina ogni possibilità di movimento sia nel caso di forze spaziali sia nel caso di forze nel piano.

Se si esamina una struttura vincolata, formata da uno o più corpi rigidi e dal numero delle reazioni vincolari, tenendo presente il numero di equazioni della Statica disponibili (tre nel piano e sei nello spazio) si possono avere i seguenti casi:

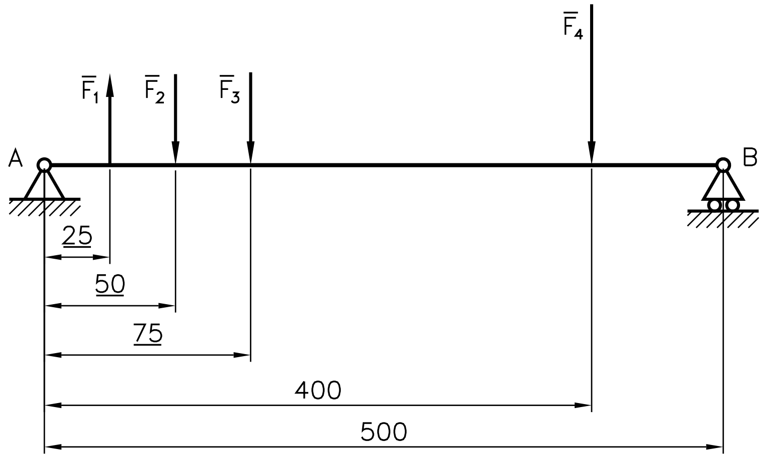
— una struttura si definisce **isostatica** se il numero delle reazioni incognite è uguale al numero delle equazioni della Statica (in tal caso il numero di vincoli è strettamente sufficiente a eliminare i suoi gradi di libertà);
— una struttura si definisce **labile** se i vincoli sono insufficienti a eliminare i gradi di libertà, quindi le equazioni della Statica non hanno significato in quanto non sussistono le condizioni di equilibrio;
— una struttura si definisce **iperstatica** se i vincoli sono in numero sovrabbondante rispetto ai gradi di libertà. Il problema dell'equilibrio, in questo caso, è staticamente indeterminato, perché le sole equazioni della Statica non sono sufficienti per il calcolo delle reazioni incognite, che risultano in numero superiore a quello delle equazioni disponibili.

Le travature reticolari

Le travature reticolari sono strutture complesse costituite da un insieme di **aste** collegate fra loro nei punti estremi detti **nodi**. Una **struttura reticolare** è strettamente indeformabile o **isostatica**, se è formata da un numero minimo di aste dato dalla [*3.8*]; **iperstatica** o ad aste sovrabbondanti, se il numero di aste è superiore a quello dato dalla [*3.8*]; **labile**, se è inferiore. Lo studio di una travatura reticolare consiste nella determinazione degli **sforzi** che si hanno nelle aste a causa dei carichi esterni applicati alla struttura. Poiché i carichi si considerano applicati nei nodi e i nodi si considerano come cerniere, le aste sono sottoposte a **trazione** o a **compressione**; nel primo caso prendono il nome di **tiranti**, nel secondo caso sono definite **puntoni**. La determinazione degli sforzi nelle aste si potrebbe effettuare tramite le equazioni della Statica applicate a ciascun nodo, ma è piuttosto laboriosa; quindi si adottano dei procedimenti di ricerca più adatti, come il metodo grafico di Culman, il metodo analitico di Ritter, il metodo grafico dell'equilibrio ai nodi o il poligono di Cremona.

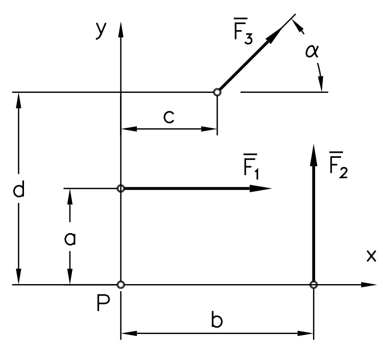
1. Data una trave caricata da un sistema di forze parallele (▸ *Fig. 3.22*), determinare il sistema equivalente forza-coppia ridotto al punto B. Sono noti: $F_1 = F_2 = F_3 = 15$ N; $F_4 = 30$ N.

Fig. 3.22
Riduzione a un punto di un sistema di forze parallele; le lunghezze sono espresse in centimetri.



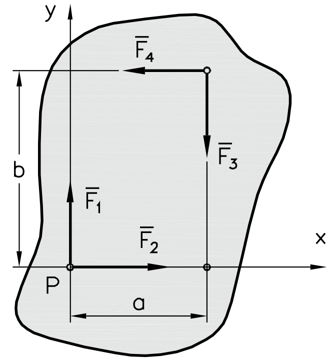
2. Ridurre al punto P (coincidente con l'origine di un sistema di assi ortogonali cartesiani) il sistema di forze complanari rappresentato nella *figura 3.23*, sapendo che: $F_1 = F_2 = 50$ N; $F_3 = 30$ N; $a = c = 1$ m; $b = d = 2$ m; $\alpha = 45°$.

Fig. 3.23
Riduzione a un punto di un sistema di tre forze complanari.



3. Date quattro forze complanari applicate a un corpo libero (▸ *Fig. 3.24*), verificare le condizioni di equilibrio, sapendo che: $F_1 = F_3 = 150$ N; $F_2 = F_4 = 200$ N; $a = 2$ m; $b = 3$ m.

Fig. 3.24
Sistema di quattro forze complanari.



4. Verificare le condizioni di equilibrio del sistema di forze della *figura 3.25*, sapendo che: $F_1 = 150$ N; $F_2 = 200$ N; $F_3 = 100$ N; $\alpha = 30°$.

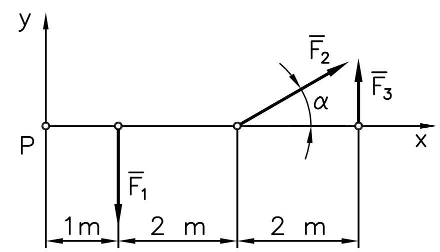


Fig. 3.25
Sistema di tre forze complanari.

5. Determinare le reazioni vincolari della trave schematizzata nella *figura 3.26*, essendo noti: F_1 =100 N; $F_2 = 80$ N; $\alpha = 45°$.

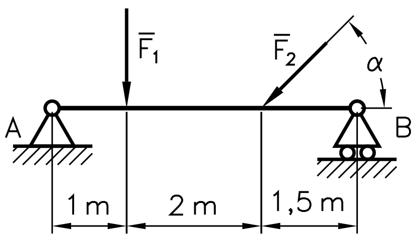


Fig. 3.26
Trave con due carichi concentrati.

6. Calcolare le reazioni vincolari della trave rappresentata nella *figura 3.27*, caricata con un carico distribuito uniforme $q = 50$ N/m.

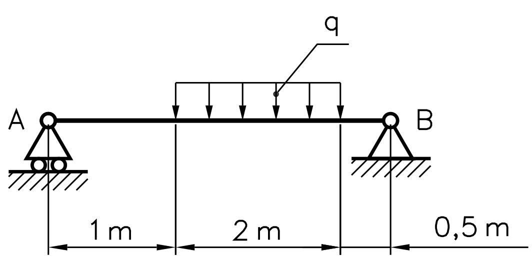


Fig. 3.27
Trave caricata con un carico distribuito uniforme.

7. Calcolare le reazioni vincolari della trave a sbalzo soggetta a un carico distribuito e a uno concentrato (▸ *Fig. 3.28*), sapendo che: $q = 200$ N/m; $F = 150$ N.

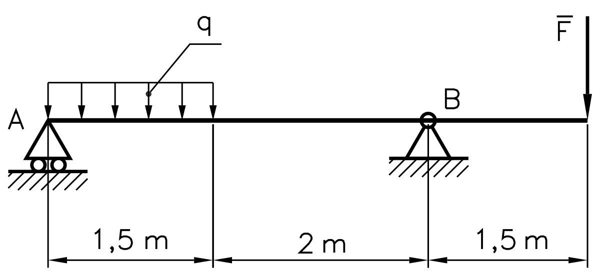
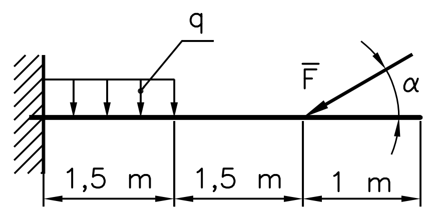


Fig. 3.28
Trave a sbalzo soggetta a carichi misti.

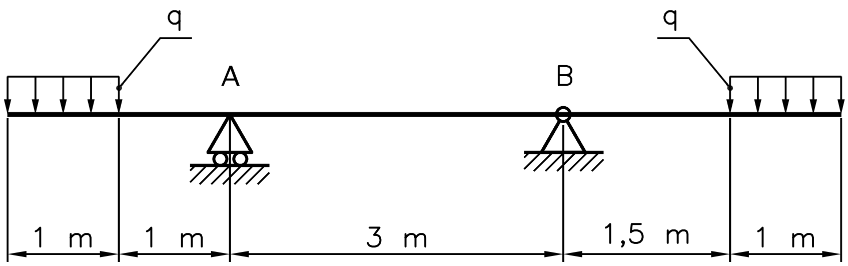
8. Determinare le reazioni nella trave a mensola sollecitata da una forza concentrata e da un carico distribuito uniforme (▸ *Fig. 3.29*), essendo noti: $F = 200$ N; $q = 80$ N/m; $\alpha = 30°$.

Fig. 3.29
Trave a mensola soggetta a carichi misti.



9. Determinare le reazioni vincolari della trave a sbalzi, rappresentata nella *figura 3.30*, soggetta a due carichi distribuiti q = 60 N/m.

Fig. 3.30
Trave a sbalzi soggetta a carichi distribuiti.



10. Data la struttura composta nella *figura 3.31*, calcolare le reazioni vincolari sapendo che: F = 100 N; a = 2 m.

Fig. 3.31
Struttura composta, con una cerniera interna, sottoposta all'azione delle forze esterne e delle reazioni vincolari.