B1.5 CONSIDERAZIONI SUL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Si consideri una traiettoria rettilinea su cui si muove, con accelerazione costante, un punto che parte da fermo dalla posizione O (▸ *Fig. 1.20*).

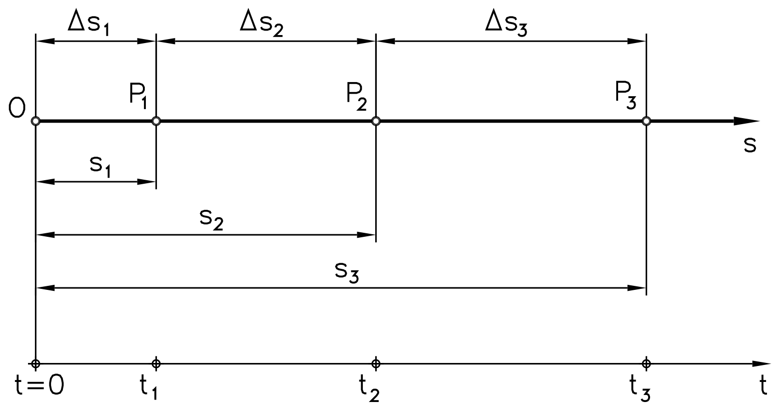

Fig. 1.20
Rappresentazione della traiettoria rettilinea di un punto che si muove con moto uniformemente accelerato e velocità iniziale $v_0 = 0$.

Determinando il rapporto fra gli spazi totali percorsi dal punto nelle successive unità di tempo a partire dall'origine O oppure il rapporto fra gli spazi parziali (Δs_i) percorsi nelle successive unità di tempo, si ricavano due interessanti proprietà.

Prima proprietà

*Nel **moto uniformemente accelerato** con **velocità** e **spazio iniziali nulli**, gli **spazi totali percorsi** stanno fra loro come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerli.*

Indicando con s_1, s_2, s_3 tre spazi totali percorsi dal punto mobile nei tempi $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s (▸ *Fig. 1.20*), si ha:

$$s_1 = \frac{1}{2} a\, t_1^2 = \frac{1}{2} a\, 1^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} a\, t_2^2 = \frac{1}{2} a\, 2^2$$

$$s_3 = \frac{1}{2} a\, t_3^2 = \frac{1}{2} a\, 3^2$$

eseguendo i rapporti fra loro si ottiene:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1^2}{2^2}; \qquad \frac{s_2}{s_3} = \frac{t_2^2}{t_3^2} = \frac{2^2}{3^2}; \qquad \frac{s_1}{s_3} = \frac{t_1^2}{t_3^2} = \frac{1^2}{3^2}$$

L'applicazione di questa proprietà sarà più chiara con un esempio.

Esempio

Un punto parte da fermo dall'origine degli spazi O e, con accelerazione costante, percorre uno spazio s_1 = 3 m nel tempo t_1 = 1 s. Determinare a quale distanza dall'origine O si troverà il punto mobile dopo 5 secondi e dopo 10 secondi (▶ *Fig. 1.21*).

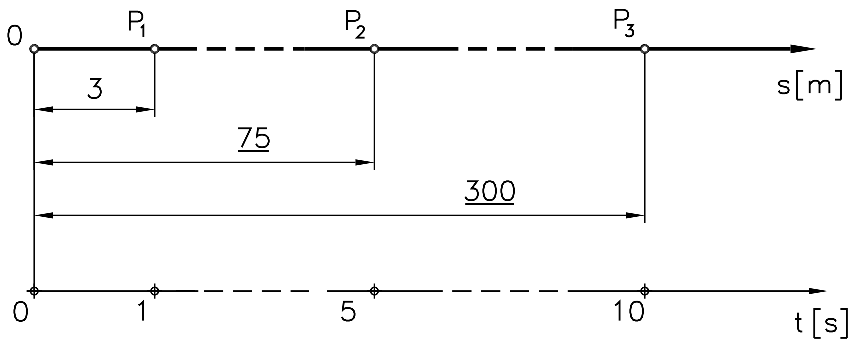

Fig. 1.21
Rappresentazione della traiettoria rettilinea di un punto che si muove con moto uniformemente accelerato e che, partendo da fermo, percorre uno spazio di 3 m in 1 secondo.

Soluzione

Poiché:

$$\frac{s_1}{s_5} = \frac{1^2}{5^2}; \qquad \frac{s_1}{s_{10}} = \frac{1^2}{10^2}$$

dopo 5 secondi, il punto disterà dall'origine:

$$s_5 = 5^2\, s_1 = 25 \times 3 = 75 \text{ m}$$

mentre dopo 10 secondi disterà:

$$s_{10} = 10^2\, s_1 = 100 \times 3 = 300 \text{ m}$$

Seconda proprietà

*Nel **moto uniformemente accelerato** con **velocità e spazio iniziali nulli**, gli **spazi parziali percorsi** nelle successive unità di tempo stanno fra loro come la serie naturale dei numeri dispari (1, 3, 5, 7, …).*

In riferimento alla *figura 1.20*, indicando con Δs_i gli spazi parziali che il punto percorre a ogni unità di tempo, si ha:

— dopo 1 secondo, $\Delta s_1 = \frac{1}{2} a\, t_1^2 = \frac{1}{2} a\, 1^2$;

— dopo 2 secondi, $\Delta s_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} a\, 2^2 - \frac{1}{2} a\, 1^2 = \frac{1}{2} a\, 3$;

— dopo 3 secondi, $\Delta s_3 = s_3 - s_2 = \frac{1}{2} a\, 3^2 - \frac{1}{2} a\, 2^2 = \frac{1}{2} a\, 5$.

Eseguendo i rapporti fra gli spazi parziali si ottiene:

$$\frac{s_1}{\Delta s_2} = \frac{1}{3}; \qquad \frac{s_1}{\Delta s_3} = \frac{1}{5}; \qquad \frac{s_2}{\Delta s_3} = \frac{3}{5}$$

l'utilità di questa proprietà risulta evidente nella seguente applicazione.

Esempio

Un punto, partendo da fermo con un'accelerazione costante $a = 2$ m/s^2, percorre uno spazio $s = 400$ m. Si chiede di dividere lo spazio percorso in quattro parti così da essere percorse nello stesso tempo (▸ *Fig. 1.22*).

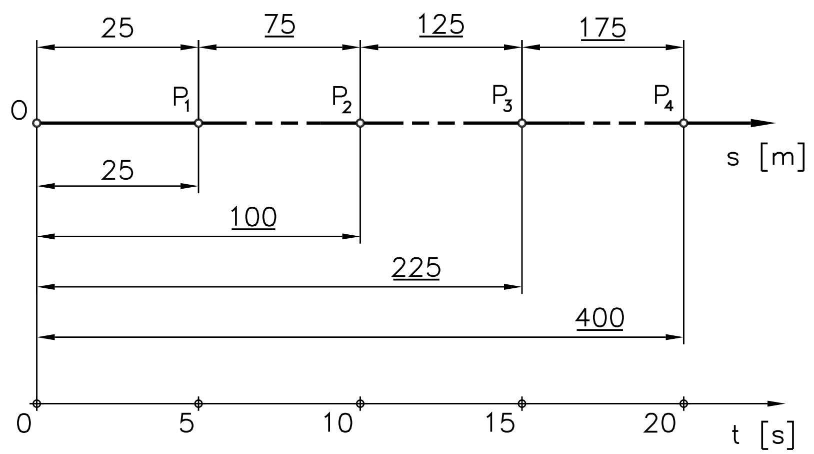

Fig. 1.22
Moto rettilineo uniformemente accelerato di un punto con partenza da fermo: rappresentazione delle quattro parti di spazio percorse in intervalli di tempo uguali.

Soluzione

Per la [*1.18*] si ha:

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

da cui si ricava il tempo impiegato dal punto per percorrere lo spazio di 400 m:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 400}{2}} = 20 \text{ s}$$

Ciascuna parte dell'intero tratto sarà quindi percorsa in un tempo pari a:

$$t = \frac{20}{4} = 5 \text{ s}$$

nei primi 5 secondi il punto percorre uno spazio pari a:

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} 2 \times 5^2 = 25 \text{ m}$$

I successivi spazi parziali, secondo la suddetta proprietà, stanno fra loro come i numeri naturali dispari 3, 5, e 7:

$$\frac{s_1}{\Delta s_2} = \frac{1}{3}; \qquad \frac{s_1}{\Delta s_3} = \frac{1}{5}; \qquad \frac{s_1}{\Delta s_4} = \frac{1}{7}$$

quindi valgono 3, 5 e 7 volte lo spazio s_1:

$$\Delta s_2 = 3\ s_1 = 3 \times 25 = 75 \text{ m}$$
$$\Delta s_3 = 5\ s_1 = 5 \times 25 = 125 \text{ m}$$
$$\Delta s_4 = 7\ s_1 = 7 \times 25 = 175 \text{ m}$$

infatti la somma dei quattro spazi parziali trovati è uguale allo spazio totale percorso di 400 m.

Grandezze fondamentali

La **Cinematica del punto** studia il **moto di un corpo**, di dimensioni trascurabili, indipendentemente dalle cause che lo hanno determinato. Il punto in moto descrive una linea continua detta **traiettoria**. L'equazione che lega spazi e tempi è detta **legge del moto**. Le grandezze oggetto di analisi sono **spazio**, **velocità** e **accelerazione**. Lo spazio si misura a partire da un punto di riferimento detto origine. La velocità media è il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo, ed è misurata in m/s. Se la velocità assume a ogni istante valori diversi si parla di **velocità istantanea**. La variazione di velocità è conseguenza dell'accelerazione, definita come rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo durante il quale è avvenuta la variazione. L'unità di misura dell'accelerazione è il m/s^2. Per ragioni di semplicità si considerano le traiettorie esclusivamente rettilinee e circolari e le accelerazioni costanti, positive o negative.

Moto rettilineo uniforme

Un punto si muove con **moto rettilineo uniforme** quando percorre una traiettoria rettilinea con velocità costante nel tempo. Le relazioni fra spazio e tempo si rappresentano graficamente su un sistema di assi cartesiani e assumono andamento rettilineo. Se la velocità è opposta al verso crescente dello spazio, si è in presenza di un **moto retrogrado**.

Moto rettilineo uniformemente vario

Un punto si muove con **moto vario** quando la sua velocità non si mantiene costante nel tempo in seguito all'accelerazione: se quest'ultima è positiva, la velocità cresce nel tempo e il moto è definito **uniformemente accelerato**; se l'accelerazione è negativa, la velocità decresce nel tempo e il moto è detto **uniformemente ritardato**. Il moto di un corpo che cade liberamente nel vuoto è un moto uniformemente accelerato; esso avviene con un'accelerazione pari all'accelerazione di gravità, ed è detto **moto naturalmente accelerato**.

Moto rettilineo uniformemente accelerato o ritardato

È il moto di un punto il cui valore della velocità iniziale, in un definito intervallo di tempo, varia con accelerazione costante positiva o negativa, con velocità iniziale v_0 e spazio iniziale s_0 diversi da zero o nulli. Il grafico dello spazio in funzione del tempo ha andamento parabolico. Nel caso di un **corpo lanciato verticalmente verso l'alto**, **nel vuoto**, il tempo di salita fino all'arresto è pari al tempo di caduta fino al punto di partenza.

Moto circolare uniforme

Un punto in **moto circolare** percorre una traiettoria circolare. Il moto è **circolare uniforme** se avviene con velocità costante nel tempo. Tale moto è caratterizzato da due tipi di velocità: la **velocità periferica**, data dal rapporto fra spazio e tempo e misurata in m/s; la **velocità angolare**, data dal rapporto fra angolo e tempo e misurata in rad/s. La velocità periferica è pari al prodotto fra velocità angolare e raggio. L'**accelerazione centripeta** a_{cp} si realizza poiché il vettore velocità periferica cambia continuamente direzione: essa è un vettore radiale orientato verso il centro della traiettoria ed è pari al rapporto fra la velocità periferica al quadrato divisa per il raggio.

Frequenza e periodo

Il **periodo** T è il tempo impiegato da un punto per compiere un giro. La **frequenza** f è il rapporto fra il numero di giri compiuti e il tempo impiegato a compierli e si misura in Hertz [Hz].

Moto circolare uniformemente vario

La presenza di un'accelerazione costante determina un **moto circolare uniformemente vario**, accelerato o decelerato. Sono presenti due accelerazioni: l'**accelerazione angolare** ε, legata alle variazioni della velocità angolare, e l'**accelerazione tangenziale** o **periferica** a_t, legata alle variazioni della velocità periferica. L'accelerazione tangenziale è il prodotto fra l'accelerazione angolare e il raggio, è tangente alla traiettoria e il suo verso può essere concorde o discorde con quello del vettore velocità.

1. Un punto si muove su una traiettoria rettilinea con moto uniforme percorrendo uno spazio di 1,5 km in 2 min. Determinare la velocità del punto ed eseguire il grafico della velocità e degli spazi.

2. Per trasportare il materiale di scavo di un laghetto artificiale si impiegano due autocarri che fanno la spola fra due zone, una di carico D e una di scarico E, poste agli estremi di un tratto di strada rettilinea di lunghezza s_0 = 2000 m (▸ *Fig. 1.44*). Sapendo che gli autocarri, indicati con A e B, si muovono in verso opposto con velocità costante v_A = 10 m/s e v_B = 12 m/s, e che B parte 6 secondi dopo A, determinare dopo quanto tempo si incontreranno in corrispondenza di un punto intermedio C.

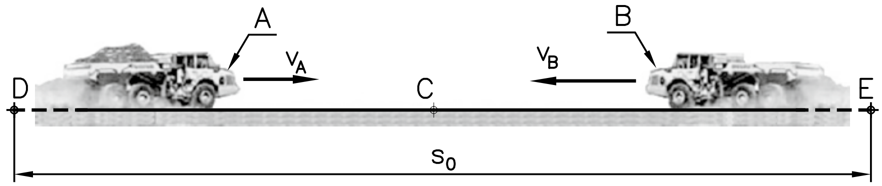

Fig. 1.44
Rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme di due autocarri, indicati con A e B, posti alle estremità della traiettoria D ed E, che si muovono in verso opposto.

3. Sul piazzale di un porto due carrelli portacontainer si muovono con moto rettilineo uniforme partendo dallo stesso punto con velocità tali per cui, in 4 secondi, se procedono nello stesso verso si allontanano fra loro di 20 m, mentre se vanno in verso opposto si allontanano di 80 m. Determinare le velocità dei due carrelli.

4. Un ciclista, dopo avere percorso un tratto s_0 = 5 km, arriva in un rettilineo in leggera discesa e ha una velocità iniziale v_0 = 10 m/s (▸ *Fig. 1.45*). Sapendo che il ciclista affronta la discesa con un'accelerazione costante a = 0,35 m/s^2, determinare il valore della velocità v raggiunta dopo 15 secondi e calcolare quanta strada ha percorso dalla partenza.

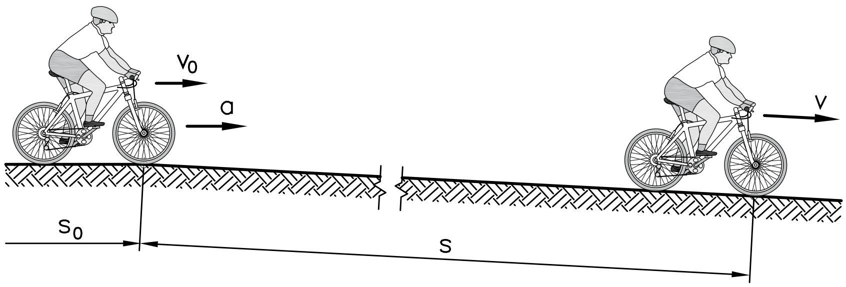

Fig. 1.45
Ciclista in moto uniformemente accelerato su un tratto di strada rettilineo in leggera discesa.

5. La velocità di un'automobile, che percorre una strada rettilinea, si riduce uniformemente da 145 km/h a 130 km/h in 100 m.
Determinare il valore della decelerazione e il tempo trascorso durante la decelerazione. Inoltre, se l'auto continua a decelerare, calcolare il tempo che deve trascorrere fino all'arresto.

6. In prossimità dell'arrivo di una gara ciclistica, il gruppo di testa corre alla velocità di 39,6 km/h. A 250 m dal traguardo, un velocista "scatta" con un'accelerazione costante di 0,4 m/s^2 e taglia il traguardo per primo. Determinare la sua velocità istantanea al traguardo e in quanto tempo percorre gli ultimi 250 m.

7. Un chicco di grandine cade da 1800 m di altezza. Se non ci fosse la resistenza dell'aria, quale sarebbe lo spazio percorso e la velocità raggiunta dopo 5 secondi? E la velocità di impatto al suolo?

8. Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità di 30 m/s. Determinare la massima altezza raggiunta e il tempo impiegato. Calcolare, inoltre, in quale istante la palla sarà a 40 m dal punto di partenza, considerando sia il moto verso l'alto sia quello verso il basso.

9. La Luna ruota attorno alla Terra effettuando un giro completo in 27,3 giorni, corrispondenti al periodo T (▸ ***Fig. 1.46***). Considerando l'orbita circolare di raggio r = 385 000 km, determinare la velocità angolare ω, quella periferica v e l'accelerazione centripeta a_{cp} della Luna.

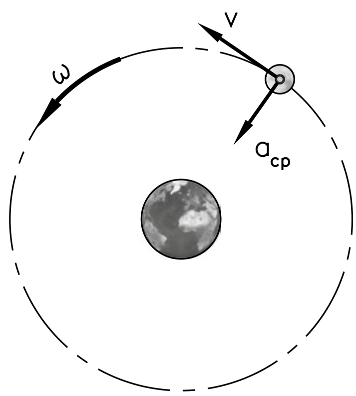

Fig. 1.46
Moto di rivoluzione della Luna attorno alla Terra: il disegno qui riportato non è in scala.

10. Un autocarro procede alla velocità v_0 di 20 m/s e si ferma dopo 5 secondi (▸ ***Fig. 1.47***). Sapendo che le ruote hanno un diametro di 74 cm, si determini la decelerazione angolare ε a cui esse sono sottoposte, la decelerazione a dell'autocarro e lo spazio s di arresto.

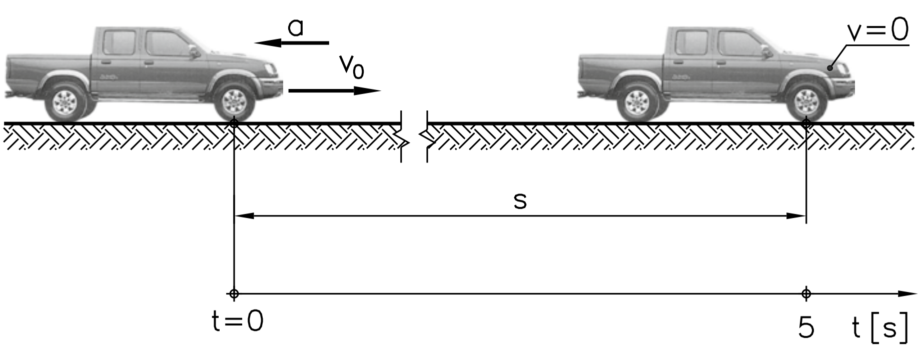

Fig. 1.47
Autocarro in fase di arresto con velocità iniziale v_0.

11. Nella centrale AET di Tremorgio in Svizzera è montata una turbina Pelton la cui ruota ha un diametro dei getti pari a d =1400 mm (▸ ***Fig. 1.48***). Sapendo che la turbina raggiunge la velocità di regime di 750 giri/min in 8 secondi, calcolare l'accelerazione angolare ε, la velocità tangenziale v in corrispondenza all'asse del getto e l'accelerazione centripeta a_{cp}.

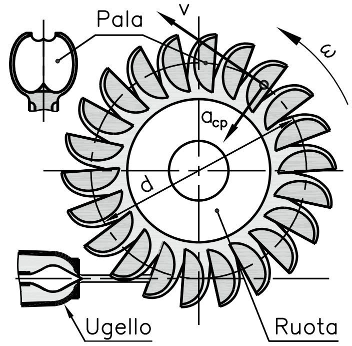

Fig. 1.48
Rappresentazione di una ruota Pelton.

12. Una trasmissione a cinghie è costituita da due pulegge di diametro d_1 = 200 mm e d_2 = 315 mm (▸ ***Fig. 1.49***). Sapendo che nelle trasmissioni a cinghia le velocità periferiche delle due pulegge sono uguali e che la puleggia minore ha una velocità di rotazione n_1 = 1500 giri/min, calcolare la velocità di rotazione n_2, espressa in giri al minuto, dell'altra puleggia e le accelerazioni centripete a_{cp} di entrambe le pulegge.

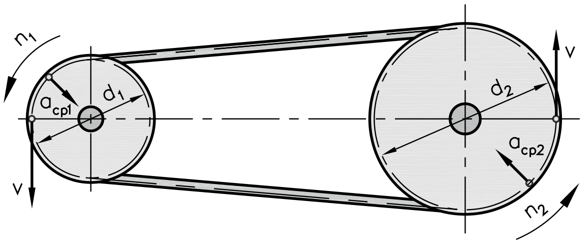

Fig. 1.49
Rappresentazione schematica di una trasmissione a cinghia.

13. Un disco rotante di diametro d = 1 m, partendo da fermo, raggiunge la velocità angolare ω = 6 rad/s con un'accelerazione ε = 3 rad/s^2.
Calcolare la velocità tangenziale v, l'accelerazione tangenziale a_t e l'accelerazione centripeta a_{cp} di una particella posta sul bordo del disco.

14. Un volano ha un'accelerazione angolare ε costante pari a 4 rad/s^2 (▸ ***Fig. 1.50***). All'inizio del moto la razza di asse OP è in posizione orizzontale. Determinare lo spostamento angolare ϑ della razza e la velocità angolare ω del volano dopo 3 secondi dall'inizio del moto.

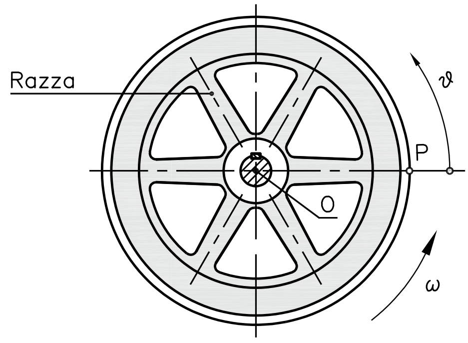

Fig. 1.50
Rappresentazione schematica di un volano.

15. Un'auto imbocca una curva di raggio $r = 50$ m e lunga 39 m alla velocità $v_0 = 60$ km/h, che mantiene fino a metà curva (▸ *Fig. 1.51*); prosegue poi con accelerazione costante fino alla fine della curva, dove raggiunge la velocità $v_1 = 80$ km/h. Determinare l'accelerazione centripeta a_{cp} e l'accelerazione tangenziale a_t dell'auto alla fine della curva.

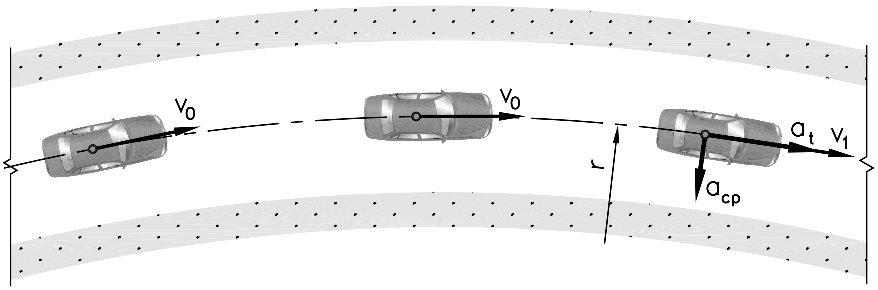

Fig. 1.51
Auto in curva: sono evidenziate le velocità in ingresso, a metà e alla fine della curva, e le accelerazioni centripeta e tangenziale alla fine della curva.

16. Su un tornio parallelo viene lavorato un albero con tre tratti cilindrici aventi diametri $d_1 = 90$ mm, $d_2 = 75$ mm e $d_3 = 60$ mm (▸ *Fig. 1.52*). Sapendo che il pezzo ruota alla velocità $n_1 = 314$ giri/min, calcolare la velocità di taglio, corrispondente alla velocità periferica sulla generatrice del cilindro, durante la tornitura del diametro d_1.
Determinare, inoltre, le velocità di rotazione n_2 e n_3 che il pezzo deve avere per mantenere la stessa velocità di taglio durante la lavorazione degli altri due diametri.

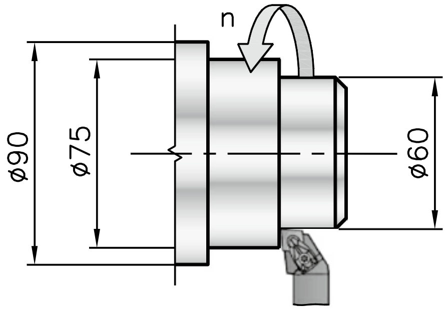

Fig. 1.52
Rappresentazione schematica della lavorazione su un tornio parallelo di un albero cilindrico a tre gradini.