

## C2.4 CORPI OSCILLANTI ATTORNO A UN ASSE FISSO

### POLIGLOTTA

#### Moto oscillatorio

GB: Oscillatory motion

F: Mouvement oscillatoire

D: Schwingendbewegung

### POLIGLOTTA

#### Pendolo semplice

GB: Simple pendulum

F: Pendule simple

D: Einfachpendel

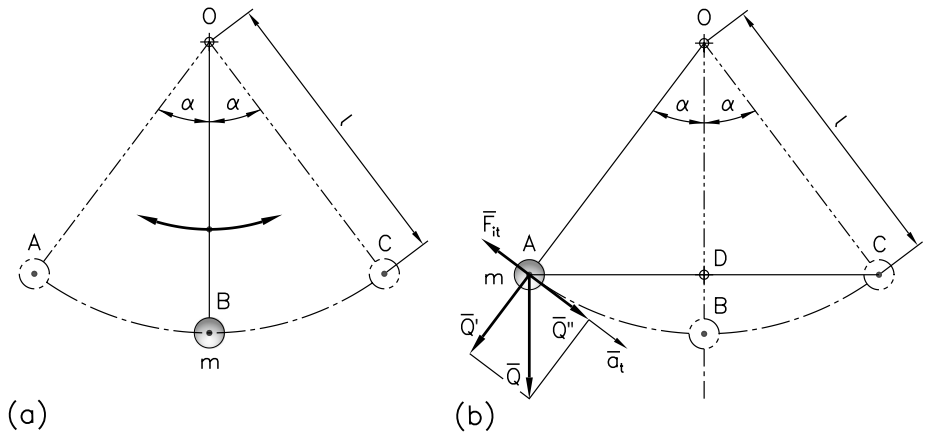
**Fig. 2.8**

- a) Schema di un pendolo semplice, formato da un punto materiale di massa  $m$  sospeso a un filo inestensibile di lunghezza  $l$ .  
 b) Rappresentazione delle forze agenti sul pendolo lasciato libero da una posizione generica A:  
 $\vec{F}$  = tensione del filo;  
 $\vec{Q}$  = peso del punto materiale;  
 $\vec{F}_{it}$  = forza d'inerzia.

In questo paragrafo si prende in esame il **moto oscillatorio** attorno a un asse fisso, sia di un punto materiale sia di un corpo rigido; il primo è rappresentato dal **pendolo semplice**, il secondo dal **pendolo composto**.

### Il pendolo semplice

Il **pendolo semplice** è un sistema ideale costituito da una massa puntiforme  $m$  (punto materiale), sospesa all'estremità di un filo inestensibile privo di massa e di lunghezza  $l$ ; l'altra estremità del filo è vincolata nel punto fisso O, detto **centro di sospensione** (► Fig. 2.8a).



In condizione di riposo, ossia di equilibrio statico, il punto materiale si trova nella posizione B, sulla retta verticale passante per il punto O; spostandolo dalla sua posizione di equilibrio stabile fino, per esempio, alla generica posizione A e lasciandolo libero di muoversi, esso tenderà a ritornare, sotto l'azione della forza di gravità e con velocità crescente, nella posizione originaria B, ma per inerzia passerà oltre e, con velocità decrescente, arriverà nella posizione C, simmetrica ad A. Giunto nella posizione C, in cui la sua velocità è nulla, si avrà un'inversione del moto e il punto ritornerà nella posizione A di partenza. Il punto materiale descrive una traiettoria circolare di centro O e raggio  $l$ , e, trascurando le resistenze passive, compie una serie di oscillazioni della stessa ampiezza che si protraggono all'infinito. In realtà la presenza delle resistenze passive causa una continua riduzione delle ampiezze delle oscillazioni fino ad annullarle; dopo un determinato tempo il pendolo si ferma.

Quando il punto materiale è lasciato libero dalla generica posizione A, definita dall'angolo  $\alpha$ , su di esso agiscono il suo peso  $\vec{Q}$ , la tensione del filo  $\vec{T}$  e la forza d'inerzia tangenziale  $\vec{F}_{it}$  (► Fig. 2.8b).

L'espressione della forza d'inerzia è:

$$F_{it} = -m a_t \quad [2.21]$$

dove  $a_t$  indica l'accelerazione tangenziale del punto materiale.

Scomponendo la forza peso in una componente radiale  $\bar{Q}'$  (ossia secondo la direzione del filo) e in una componente tangenziale  $\bar{Q}''$  (tangente alla traiettoria circolare), si ha:

$$Q' = Q \cos \alpha = m g \cos \alpha \quad [2.22]$$

e:

$$Q'' = Q \sin \alpha = m g \sin \alpha \quad [2.23]$$

la componente  $\bar{Q}'$  non ha effetti, essendo equilibrata dalla reazione  $\bar{T}$  del filo (tensione del filo) considerato indeformabile; invece la componente  $\bar{Q}''$  genera il moto del punto materiale verso la posizione B di equilibrio. Pertanto agli effetti del moto si devono considerare la forza d'inerzia tangenziale  $\bar{F}_{it}$  e la componente del peso  $\bar{Q}''$ , le quali devono soddisfare l'equazione di equilibrio dinamico (principio di D'Alembert):

$$Q'' + F_{it} = 0$$

Sostituendo rispettivamente la [2.23] e la [2.21] si ottiene:

$$m g \sin \alpha - m a_t = 0$$

e semplificando si ricava:

$$a_t = g \sin \alpha \quad [2.24]$$

che rappresenta l'accelerazione tangenziale istantanea del punto materiale.

Se l'angolo  $\alpha$  è molto piccolo, minore di circa  $5^\circ$ ,  $\sin \alpha$  è praticamente uguale ad  $\alpha$ , espresso in radianti. Per esempio, per  $\alpha = 2^\circ = 0,0349$  rad,  $\sin \alpha = 0,0349$ ; per  $\alpha = 5^\circ = 0,0873$  rad,  $\sin \alpha = 0,0872$ .

Quindi, assumendo  $\sin \alpha = \alpha$ , la [2.24] diventa:

$$a_t = g \alpha \quad [2.25]$$

Indicando con AB l'arco di cerchio percorso dal punto e con  $l$  la lunghezza del filo, corrispondente al raggio della traiettoria circolare, si ha:

$$AB = l \alpha$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{AB}{l}$$

Per  $\alpha$  molto piccolo, il moto è praticamente rettilineo; si può dunque sostituire l'arco AB con la semicorda AD, per cui si ha:

$$\alpha = \frac{AD}{l}$$

sostituendo nella [2.25] si ottiene:

$$a_t = g \frac{AD}{l} \quad [2.26]$$

**POLIGLOTTA**

**Oscillazioni isocrone**

GB: Isochronal oscillation

F: Oscillation isochrone

D: Isochrone Schwingung

Da questa relazione si deduce che l'accelerazione  $a_t$  è direttamente proporzionale alla distanza del punto materiale dalla sua posizione media, ossia è massima agli estremi A e C e decresce fino al valore nullo nella posizione centrale B.

Queste caratteristiche sono le stesse del moto armonico, per cui il tempo  $T$  che impiega il punto a compiere un'oscillazione completa, detto **periodo del pendolo**, può essere ricavato dall'espressione del periodo del moto armonico:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s}{a}}$$

sostituendo allo spazio  $s$  la semicorda AD e all'accelerazione  $a$  la [2.23].

Il periodo del pendolo semplice, quando l'ampiezza dell'oscillazione è piccola, vale dunque:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad [2.27]$$

Si noti che in questa relazione non compare l'angolo  $\alpha$ , che caratterizza l'ampiezza dell'oscillazione; perciò si può affermare che il periodo del pendolo è indipendente da esso, ossia, le oscillazioni del pendolo si realizzano nello stesso tempo, indipendentemente dall'ampiezza. Esse sono dette **oscillazioni isocrone**.

*Osservazione: il pendolo semplice, di cui siano noti esattamente il periodo di oscillazione  $T$  e la lunghezza  $l$ , fornisce un mezzo utile per misurare il valore dell'accelerazione di gravità  $g$  a ogni latitudine.*

*Dalla [2.27]:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

elevando al quadrato, si ha:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

dunque il valore dell'accelerazione di gravità è:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

## Il pendolo fisico o pendolo composto

Il momento d'inerzia di massa, rispetto a un asse baricentrico di un corpo rigido, può essere determinato sperimentalmente facendolo oscillare come un pendolo su un piano verticale attorno a un asse fisso non baricentrico. Il corpo oscillante nel modo descritto rappresenta un **pendolo fisico**. Un tale sistema è detto anche **pendolo composto**, perché

**POLIGLOTTA**

**Pendolo fisico**

GB: Physical pendulum

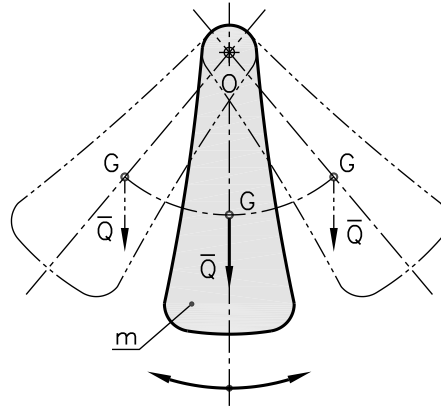
F: Pendule physique

D: Physikalisches Pendel

si può considerare costituito da tanti pendoli semplici quante sono le masse puntiformi che costituiscono il corpo rigido (► Fig. 2.9).

**Fig. 2.9**

Pendolo fisico rappresentato da un corpo rigido, vincolato a oscillare attorno a un'asse fisso non baricentrico di traccia  $O$  sul piano del disegno, con centro di massa in  $G$ . Il pendolo è rappresentato nella posizione di equilibrio statico.



Tale pendolo differisce da quello semplice a causa delle sue dimensioni non trascurabili e della diversa distribuzione dei pesi parziali. Pertanto la relazione che esprime il periodo di oscillazione del pendolo semplice non è valida per il pendolo composto.

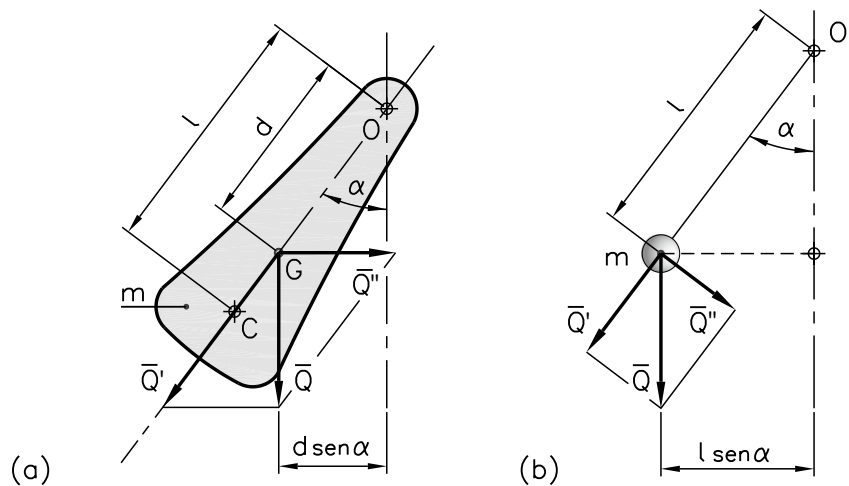
Lo studio dinamico del moto del pendolo composto si semplifica confrontandolo con il moto di un pendolo semplice a esso equivalente, che abbia cioè una lunghezza tale da farlo oscillare in sincronismo con il pendolo composto. A tale scopo si consideri la **figura 2.10**, in cui sono rappresentati i due pendoli spostati entrambi dello stesso angolo  $\alpha$  dalla posizione di equilibrio statico.

**Fig. 2.10**

a) Pendolo composto, rappresentato da un corpo rigido di forma generica.

b) Pendolo semplice.

Entrambi i pendoli oscillano in sincronismo:  $d$  = distanza fra il baricentro  $G$  del corpo rigido e il suo centro di sospensione  $O$ ;  $l$  = lunghezza del pendolo semplice equivalente:  $\bar{Q}' = m g$  = peso del corpo rigido applicato nel baricentro  $G$ ;  $\bar{Q} = m g$  = peso del pendolo semplice.



Poiché i due pendoli sono in sincronismo, per uno stesso angolo  $\alpha$  hanno la stessa accelerazione angolare  $\varepsilon$ ; dunque, applicando a entrambi la seconda legge della Dinamica, si hanno i seguenti casi.

a) Per il pendolo composto si ha:

$$M = J \varepsilon \quad [2.28]$$

dove:

$$M = \bar{Q}'' d \sin \alpha$$

**RICHIAMO**

**Il momento d'inerzia di massa**

$J$  del corpo rispetto all'asse di oscillazione di traccia  $O$  si ottiene, per il teorema di trasposizione, sommando il momento d'inerzia di massa  $J_0$  rispetto all'asse baricentrico di traccia  $G$ , con il prodotto della massa  $m$  per il quadrato della distanza  $d$  dei due assi:

$$J = J_0 + m d^2$$

è il momento motore istantaneo rispetto all'asse di oscillazione e:

$$J = J_0 + m d^2$$

è il **momento d'inerzia di massa** del corpo rispetto allo stesso asse;  $J_0$ , invece, è il momento d'inerzia di massa del corpo rispetto all'asse baricentrico di traccia  $G$ .

b) Per il pendolo semplice si ha:

$$M_1 = J_1 \varepsilon \quad [2.29]$$

in cui:

$$M_1 = Q'' l \sin \alpha$$

rappresenta il momento motore istantaneo rispetto all'asse di oscillazione, mentre:

$$J_1 = m l^2$$

è il momento d'inerzia della massa puntiforme rispetto allo stesso asse. Esplicitando le relazioni [2.28] e [2.29] si ottiene rispettivamente:

$$Q'' d \sin \alpha = J \varepsilon$$

e:

$$Q'' l \sin \alpha = J_1 \varepsilon$$

Essendo l'accelerazione angolare  $\varepsilon$  la stessa per i due pendoli (devono oscillare in sincronismo), si ottiene:

$$\frac{m g d \sin \alpha}{J_0 + m d^2} = \frac{m g l \sin \alpha}{m l^2}$$

da cui, semplificando, si ricava il valore della lunghezza  $l$  del pendolo semplice equivalente al pendolo composto:

$$l = \frac{J_0 + m d^2}{m d} = \frac{J_0}{m d} + d \quad [2.30]$$

Per ricavare il valore del periodo di oscillazione del pendolo composto, basta sostituire il valore di  $l$  trovato nella [2.27] del pendolo semplice:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m d^2}{m d g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m d^2}{Q d}} \quad [2.31]$$

quindi, per il calcolo del periodo, la massa del pendolo composto può considerarsi concentrata in un punto  $C$ , la cui distanza dal centro di sospensione è  $l$ .

Come si può notare dalla [2.30], la lunghezza  $l$  è maggiore della distanza  $d$  fra il baricentro del pendolo composto e il suo centro di sospensione, per cui il punto C, detto **centro di oscillazione** del pendolo composto, si trova al disotto del baricentro G (► Fig. 2.10).

Come premesso, è possibile determinare sperimentalmente il momento d'inerzia di massa baricentrico  $J_0$  di un qualunque corpo, usandolo come un pendolo fisico. Infatti, dalla [2.31] si ricava:

$$J_0 = \frac{T^2 Q d}{4 \pi^2} - m d^2 \quad [2.32]$$

dove le quantità al secondo membro sono tutte misurabili.

### Esempio

Un disco di raggio  $r = 100$  mm è vincolato in un punto del suo bordo (► Fig. 2.11). Determinare il suo periodo di oscillazione e la lunghezza del pendolo semplice equivalente.

### Soluzione

Il momento d'inerzia di massa del disco, rispetto a un asse passante per il baricentro, si ricava dalla **tabella 2.1** (cilindro pieno):

$$J_0 = \frac{1}{2} m r^2$$

dove  $m$  è la massa del disco e  $r$  è il suo raggio.

Poiché la distanza fra il baricentro e il centro di sospensione è  $d = r$ , il momento d'inerzia di massa  $J$  del disco, rispetto all'asse passante per il punto di sospensione, vale:

$$J = J_0 + m d^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$$

Allora il valore del periodo di oscillazione, per la [2.31], è:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{m d g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{m r g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{3 \cdot 0,1}{2 \cdot 9,81}} = 0,777 \text{ s}$$

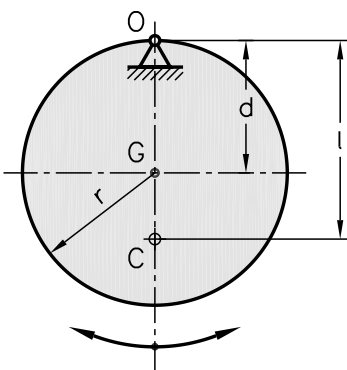
La lunghezza del pendolo semplice, equivalente al pendolo composto (disco oscillante), si ottiene dalla [2.30]:

$$l = \frac{J_0 + m d^2}{m d} = \frac{\frac{3}{2} m r^2}{m r} = \frac{3}{2} r = 150 \text{ mm}$$

Da questo risultato si deduce che il centro di oscillazione del disco si trova 150 mm al disotto del centro di sospensione.

**Fig. 2.11**

Pendolo fisico rappresentato da un disco di raggio  $r = 100$  mm e vincolato in un punto sul suo bordo.



## C2.5 SISTEMI DI PUNTI MATERIALI ISOLATI

*Un sistema formato da due o più punti materiali, sottratto all'azione di forze esterne e soggetto solamente a forze interne, si dice **sistema isolato**.*

### POLIGLOTTA

#### **Sistema isolato**

GB: Insulated system

F: Système isolé

D: Isoliertes System

### POLIGLOTTA

#### **Forza interna**

GB: Internal force

F: Force intérieure

D: Innenkraft

Ciò che contraddistingue i sistemi di punti materiali da un singolo punto materiale è proprio l'esistenza delle **forze interne**; sui sistemi agiscono sempre forze interne, ossia quelle forze che concretizzano le azioni che i punti del sistema reciprocamente esercitano fra di loro. È proprio grazie alla presenza delle forze interne che un sistema è tale: in mancanza di interazioni, un sistema di punti si disgregherebbe sotto l'azione di forze esterne.

Le forze interne possono essere di varia natura: sono tali, per esempio, le forze di coesione o le forze che due corpi si trasmettono, in caso d'urto, nella zona in cui avviene il contatto. Esse costituiscono sempre un sistema di forze equilibrato, cioè a risultante e a momento risultante nulli, sia in condizioni di quiete sia in condizioni di moto. Si osservi, tuttavia, che il moto di un sistema può essere dovuto esclusivamente all'azione delle forze interne; un esempio tipico è rappresentato dal sistema solare, il cui moto è dovuto soltanto all'azione delle forze gravitazionali che esercitano fra di loro i corpi celesti che lo costituiscono (Sole, pianeti, satelliti e asteroidi) e che sono, appunto, forze interne al sistema.

Per i sistemi isolati vale il **principio di conservazione** della risultante e del momento risultante delle forze, della velocità del baricentro e della quantità di moto del sistema.

### Conservazione della risultante e del momento risultante delle forze agenti sul sistema

Le forze interne di un sistema isolato, per il principio di azione e reazione, costituiscono un sistema equilibrato, ossia la risultante e il momento risultante conservano il valore nullo.

### Conservazione della velocità del baricentro del sistema

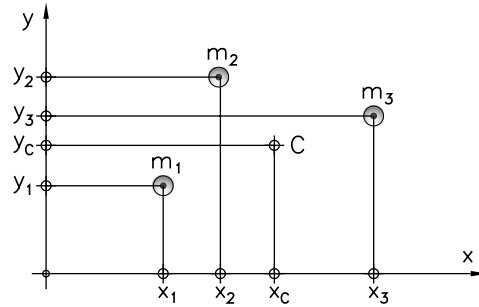
Considerando tutta la massa del sistema concentrata nel suo baricentro (detto anche **centro di massa**), su cui si ritiene che agiscano tutte le forze, non essendo presente alcuna azione di forze esterne, il baricentro è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme; inoltre le forze interne, avendo risultante nulla, non influiscono sul moto del baricentro.

*Osservazione: a un sistema di punti materiali può essere assegnato un **centro di massa**, il cui moto può essere descritto in modo relativamente semplice, anche se i punti del sistema cambiano le loro reciproche posizioni durante il moto.*

Si consideri un sistema formato, per esempio, da tre punti materiali di massa  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , contenuti in un piano (► Fig. 2.12).

**Fig. 2.12**

Centro di massa C di un sistema formato da tre punti materiali di massa  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ .



Il centro di massa C del sistema si trova sullo stesso piano delle tre masse ed è definito e individuato dalle coordinate  $x_C$  e  $y_C$ , essendo:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

e:

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

dove  $x_1$  e  $y_1$  sono le coordinate della massa  $m_1$ ;  $x_2$  e  $y_2$  sono le coordinate della massa  $m_2$ ;  $x_3$  e  $y_3$  sono le coordinate della massa  $m_3$ .

Se il sistema è costituito da molti punti materiali contenuti in un piano, il centro di massa è individuato dalle coordinate:

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \\ y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \end{cases} \quad [2.33]$$

in cui  $\sum_i m_i$  è la massa totale del sistema.

Nel caso in cui il sistema è costituito da molti punti distribuiti nello spazio, la posizione del centro di massa è definita dalle coordinate:

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \\ y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \\ z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

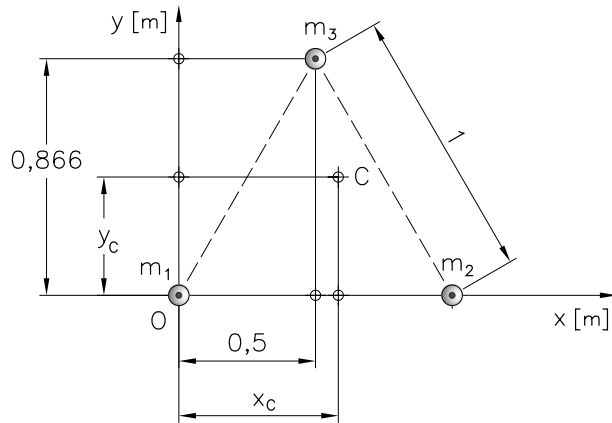


### Esempio

Individuare il centro di massa di tre punti materiali di massa  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg e  $m_3 = 3$  kg, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $l = 1$  m (► Fig. 2.13).

Fig. 2.13

Rappresentazione del centro di massa C di un sistema formato da tre masse poste ai vertici di un triangolo equilatero.



### Soluzione

Scegliendo l'asse  $x$  coincidente con un lato del triangolo, si ha:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{0 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 + 3} = \frac{7}{12} \text{ m}$$

$$y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{0 + 0 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

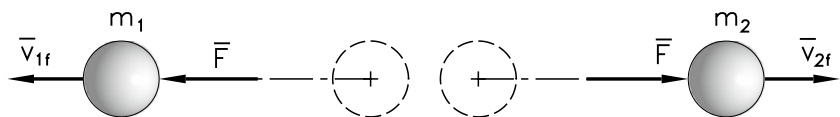
### Conservazione della quantità di moto del sistema

La quantità di moto di un sistema può essere variata solo da forze esterne, infatti le forze interne, essendo uguali e contrarie, producono variazioni della quantità di moto uguali e contrarie e quindi si annullano a vicenda. Pertanto le quantità di moto dei singoli punti materiali possono cambiare, ma la loro somma rimane costante se non sono presenti forze esterne.

Ciò si può dimostrare considerando, per esempio, un sistema isolato formato da due punti inizialmente fermi, soggetti all'azione dell'impulso ( $F t$ ) di una forza interna  $\vec{F}$  applicata per un intervallo di tempo  $t$  (► Fig. 2.14).

Fig. 2.14

Sistema isolato formato da due punti materiali di massa  $m_1$  e  $m_2$ , inizialmente in quiete, soggetti a una forza interna  $\vec{F}$  per un intervallo di tempo  $t$ .



**POLIGLOTTA**

**Principio della conservazione della quantità di moto**

- GB: Principle of momentum conservation
- F: Principe de la conservation de la quantité du mouvement
- D: Prinzip der Bewegungsgrosseerhaltung

Essendo nulla la velocità iniziale dei singoli punti, è nulla la loro quantità di moto ( $m v$ ) iniziale e anche quella del sistema.

Per l'azione dell'impulso della forza  $\vec{F}$ , i punti materiali acquistano le quantità di moto date dalle seguenti relazioni:

$$F t = m_1 v_{1f}$$

e:

$$- F t = m_2 v_{2f}$$

Essendo gli impulsi uguali e di segno contrario, anche le quantità di moto dei punti risultano uguali e di segno contrario:

$$m_1 v_{1f} = -m_2 v_{2f}$$

da cui si ottiene:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0$$

ossia, a seguito dell'azione della forza interna, la quantità di moto del sistema non è variata, ma è sempre nulla come all'inizio. Quest'ultima relazione esprime analiticamente il principio della conservazione della quantità di moto, nel caso di un sistema formato da due punti materiali in quiete, ma il principio è valido anche per i sistemi costituiti da più di due punti e per i punti con velocità iniziale diversa da zero. Pertanto il **principio di conservazione della quantità di moto** si può così enunciare:

*la quantità di moto di un sistema soggetto a sole forze interne conserva immutato il suo valore.*

**Esempio**

Un cannone, la cui massa è  $m_1 = 5800$  kg, spara un proiettile di massa  $m_2 = 210$  kg. Sapendo che la velocità iniziale del proiettile è  $v_2 = 275$  m/s, determinare la velocità  $v_1$  di rinculo del cannone.

**Soluzione**

Il cannone e il proiettile costituiscono un sistema isolato.

Poiché la quantità di moto del sistema è nulla prima dello sparo, per il principio della conservazione della quantità di moto dev'esserlo anche dopo; pertanto la quantità di moto del sistema dopo lo sparo è:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

Sostituendo i valori noti si ottiene:

$$5800 v_1 + 210 \times 275 = 0$$

da cui si ricava la velocità di rinculo del cannone:

$$v_1 = \frac{210 \times 275}{5800} = 9,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

che ha uguale direzione, ma verso opposto rispetto alla velocità del proiettile.

## C2.6 URTO FRA DUE CORPI

Un'applicazione significativa della conservazione della quantità di moto riguarda il fenomeno dell'urto fra corpi.

Per **urto** s'intende la collisione fra due corpi che possono essere entrambi in moto oppure uno in moto e l'altro fermo.

Gli urti sono solitamente classificati a seconda che in essi rimanga invariata o meno l'energia cinetica; se rimane invariata, l'**urto** viene detto **elastico**, altrimenti **anelastico** (non elastico). L'urto fra due sfere d'avorio (palle da biliardo) si può considerare elastico, mentre l'urto di una pallottola che colpisce un bersaglio e vi rimane conficcata è anelastico. Lo studio dell'urto in questo paragrafo è limitato al caso **unidimensionale**, detto anche **urto centrale** o **normale**, ossia al caso in cui il moto relativo prima e dopo l'urto avviene lungo la medesima linea retta passante per i baricentri dei due corpi.

### Urto centrale elastico

Si considerino due sfere di materiale elastico che, senza ruotare, si muovono inizialmente lungo la retta congiungente i loro centri con velocità aventi direzione e verso uguali. Le due sfere, quindi, si urtano frontalmente, muovendosi poi, dopo l'urto, sempre lungo la stessa retta (► Fig. 2.15).

#### POLIGLOTTA

##### Urto elastico

GB: Elastic impact

F: Impact élastique

D: Elastischer Stoss

#### POLIGLOTTA

##### Urto anelastico

GB: Unelastic impact

F: Impact anélastique

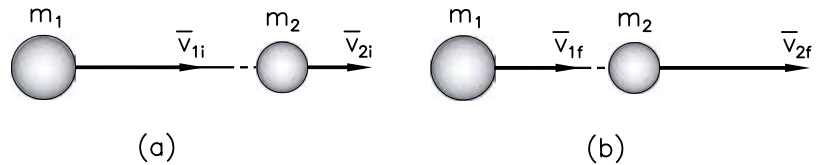
D: Anelastischer Stoss

Fig. 2.15

Rappresentazione di due sfere di massa  $m_1$  e  $m_2$  che si muovono con velocità diverse lungo la retta congiungente i loro centri:

a) prima dell'urto;

b) dopo l'urto.



#### RICHIAMO

##### L'energia potenziale elastica

è l'energia immagazzinata da un corpo, deformabile elasticamente, a causa delle deformazioni da esso subite. Per il **principio di conservazione dell'energia**, se un corpo non cede o riceve energia da altri corpi, trascurando i fenomeni dissipativi, l'energia totale da esso posseduta rimane costante, indipendentemente dalle trasformazioni subite. In un corpo in cui sono presenti l'energia potenziale  $E_p$  e quella cinetica  $E_c$ , la sua energia totale meccanica  $E_m$  vale:

$$E_m = E_p + E_c = \text{cost}$$

Supponendo  $m_1 > m_2$  e  $v_{1i} > v_{2i}$ , per il principio di conservazione della quantità di moto, si ha l'uguaglianza fra la quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

che può essere scritto nel modo seguente:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad [2.34]$$

Poiché non vi è alcuna deformazione plastica, cioè permanente, l'**energia potenziale elastica** accumulata durante l'urto, a scapito dell'energia cinetica, è completamente restituita dopo l'urto, di nuovo sotto forma di energia cinetica. Dunque, per il **principio di conservazione dell'energia meccanica** ( $E_p + E_c = \text{cost}$ ), l'energia cinetica del sistema rimane invariata, ovvero, non essendovi deformazioni permanenti

**RICHIAMO**

Il **teorema delle forze vive**, o **dell'energia cinetica**, afferma che il lavoro sviluppato da una forza d'intensità costante, agente su un corpo in moto di traslazione, è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso:

$$L = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

dove  $v_f$  indica la velocità finale e  $v_i$  rappresenta quella iniziale.

nelle due sfere, il lavoro di deformazione speso nell'urto è nullo e per il **teorema delle forze vive** (o **dell'energia cinetica**) è nulla anche la variazione dell'energia cinetica del sistema.

Tali considerazioni conducono alla seguente relazione, esprime la conservazione dell'energia cinetica:

$$\left( \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \right) = 0$$

ossia:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

che si può scrivere come:

$$m_1 (v_{1f}^2 - v_{1i}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad [2.35]$$

Risolvendo il sistema formato dalle relazioni [2.34] e [2.35], si ricavano le velocità dopo l'urto delle due sfere:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad [2.36]$$

e:

$$v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad [2.37]$$

**Casi particolari**

Se le due sfere hanno masse uguali ( $m_1 = m_2$ ), le relazioni [2.36] e [2.37] diventano:

$$v_{1f} = v_{2i} \quad [2.38]$$

e:

$$v_{2f} = v_{1i} \quad [2.39]$$

vale a dire, i valori delle velocità delle due sfere si scambiano.

Se una delle due sfere è ferma, per esempio la sfera di massa  $m_2$ , allora  $v_{2i} = 0$  e si ha:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad [2.40]$$

e:

$$v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad [2.41]$$

Ovviamente, se anche  $m_1 = m_2$ , si ottiene:

$$v_{1f} = 0$$

e:

$$v_{2f} = v_{1i}$$

Nel caso di una sfera di massa  $m_1$  che urta contro un muro di massa  $m_2$ , molto più grande di  $m_1$  (si può considerare  $m_2 = \infty$  rispetto a  $m_1$ ), per la [2.40] si ottiene:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $m_2$  si ha:

$$v_{1f} = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i}$$

e, poiché  $m_2 = \infty$  e  $\frac{m_1}{m_2} = 0$ , si ricava:

$$v_{1f} = -v_{1i} \quad [2.42]$$

Ovviamente:

$$v_{2f} = v_{2i} = 0 \quad [2.43]$$

La sfera, dunque, dopo l'urto rimbalza indietro con la stessa velocità.

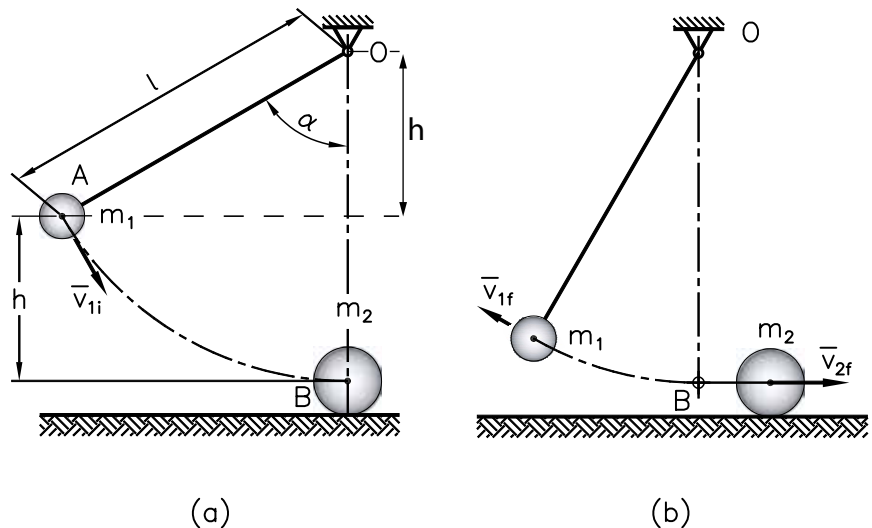
### Esempio

Una sfera di massa  $m_1 = 3$  kg, sospesa per mezzo di un'asta di lunghezza  $l = 2$  m, è lasciata cadere dalla posizione A, individuata dall'angolo  $\alpha = 60^\circ$  formato con la posizione di riposo B (► Fig. 2.16a). Sul piano, in corrispondenza della posizione B, è posta un'altra sfera in quiete, di massa  $m_2 = 10$  kg. Considerando l'urto elastico, determinare la velocità di ciascuna sfera dopo l'urto.

Fig. 2.16

Rappresentazione di una sfera sospesa mediante un'asta che, lasciata libera di muoversi da una generica posizione A, urta un'altra sfera ferma posta nella posizione B di riposo della prima:

- a) prima dell'urto;
- b) dopo l'urto.



### Soluzione

All'istante dell'urto, la velocità della sfera di massa  $m_2$  vale  $v_{2i} = 0$ ; quella della sfera di massa  $m_1$  è:

$$v_{1i} = \sqrt{2gh}$$

con:

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos 60^\circ) = 1 \text{ m}$$

Sostituendo i valori noti si ha:

$$v_{1i} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1} = 4,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Applicando la [2.40] e la [2.41] si ricavano le velocità delle due sfere dopo l'urto:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{3 - 10}{3 + 10} 4,43 = -2,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e:

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2 \times 3}{3 + 10} 4,43 = 2,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dopo l'urto, quindi, la sfera più piccola ritorna indietro con la velocità  $v_{1f} = 2,38 \text{ m/s}$ , mentre la sfera più grande procede in avanti lungo il piano con la velocità  $v_{2f} = 2,04 \text{ m/s}$  (► Fig. 2.16b).

### Urto centrale anelastico

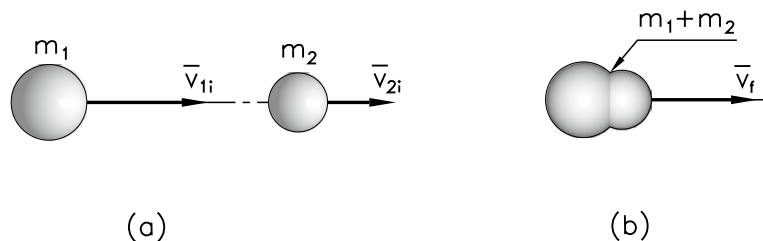
Se l'urto è anelastico, l'energia cinetica del sistema non rimane invariata, in quanto una parte si trasforma in calore (dovuto al lavoro di deformazione permanente), ma il principio della conservazione della quantità di moto continua a valere.

Si considerino due sfere di materiale anelastico di massa  $m_1$  e  $m_2$  che, a causa dell'urto, si deformano e non riacquistano la configurazione iniziale. Esse si muovono lungo la stessa retta congiungente i loro centri con velocità  $v_{1i} > v_{2i}$  e hanno verso uguale (► Fig. 2.17). Durante l'urto, le sfere si deformano in modo permanente, formando un corpo unico, ossia rimangono attaccate insieme dopo l'urto e si muovono con una velocità finale comune  $v_f$ .

Fig. 2.17

Rappresentazione di due sfere di materiale anelastico e di massa  $m_1$  e  $m_2$ , che si muovono con velocità  $v_{1i} > v_{2i}$  lungo la retta congiungente i loro centri:

- a) prima dell'urto;
- b) dopo l'urto.



La quantità di moto complessiva delle due sfere prima dell'urto vale:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

dopo l'urto, invece, la quantità di moto vale:

$$(m_1 + m_2)v_f$$

dove  $(m_1 + m_2)$  è la massa del corpo formato dalle due sfere attaccate.

Poiché vale il principio di conservazione della quantità di moto, si ha:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f \quad [2.44]$$

da cui si ricava il valore della velocità finale comune delle due sfere:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad [2.45]$$

Il lavoro di deformazione delle due sfere durante l'urto viene compiuto a spese delle energie cinetiche delle sfere prima dell'urto.

L'energia cinetica delle singole sfere prima dell'urto vale:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

L'energia cinetica  $E_{cf}$  del corpo unico formato dalle due sfere dopo l'urto è:

$$E_{cf} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2$$

Pertanto il lavoro di deformazione speso durante l'urto, per il teorema delle forze vive, è dato dalla differenza fra l'energia cinetica delle due sfere prima e dopo l'urto:

$$L = E_{cf} - (E_{c1} + E_{c2})$$

ossia:

$$L = \left( \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \quad [2.46]$$

Sostituendo il valore della velocità finale, dato dalla [2.45], ed eseguendo le operazioni indicate si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} - v_{2i})^2 \quad [2.47]$$

Estendendo le considerazioni fatte al caso in cui le velocità iniziali delle due sfere abbiano uguale direzione e verso opposto (► Fig. 2.18), le relazioni [2.45] e [2.47] diventano:

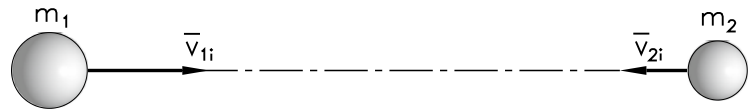
$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad [2.48]$$

e:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} + v_{2i})^2 \quad [2.49]$$

**Fig. 2.18**

Rappresentazione di due sfere, di materiale anelastico e di massa  $m_1$  e  $m_2$ , che si muovono con velocità aventi uguale direzione e verso opposto lungo la retta congiungente i loro centri.



Nel caso di urto anelastico fra un corpo di massa  $m_1$  in moto e un ostacolo fermo ( $v_{2i} = 0$ ) di massa  $m_2$  molto più grande, il rapporto  $m_1/m_2$  si può considerare nullo, per cui le relazioni [2.45] e [2.47] diventano:  
— velocità finale della massa  $m_1$ :

$$v_{if} = \frac{\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i} = 0 \quad [2.50]$$

— lavoro sviluppato durante l'urto:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad [2.51]$$

Da quanto esposto, si può concludere che nell'urto di due corpi anelastici si ha sempre una perdita di energia cinetica, che viene spesa sotto forma di lavoro di deformazione permanente.

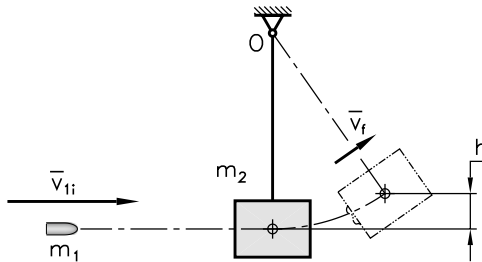
### Esempio

Un proiettile, di massa  $m_1 = 10$  g (► Fig. 2.19), è sparato orizzontalmente da un fucile contro un blocco di piombo, di massa  $m_2 = 3$  kg, sospeso mediante una cordicella nel punto O. Determinare la velocità del proiettile prima dell'impatto, sapendo che il sistema blocco-proiettile, dopo l'urto, si sposta verticalmente dell'altezza  $h = 70$  mm.



Fig. 2.19

Blocco di piombo di massa  $m_2$  sospeso mediante una cordicella nel punto O, contro il quale è sparato un proiettile di massa  $m_1$ .



### Soluzione

Per il principio di conservazione della quantità di moto (► **Form. 2.44**), considerando il blocco di piombo inizialmente fermo ( $v_{2i} = 0$ ), si ha:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

in cui  $v_{1i}$  è la velocità del proiettile prima dell'urto e  $v_f$  è la velocità comune del blocco e del proiettile dopo l'urto.

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica alla parte del moto dopo l'urto, si ricava l'uguaglianza fra l'energia potenziale di posizione  $[(m_1 + m_2) g h]$  e l'energia cinetica  $[1/2 (m_1 + m_2) v_f^2]$  del sistema blocco-proiettile:

$$(m_1 + m_2) g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2$$

Ricavando  $v_f$  dalla relazione del principio di conservazione della quantità di moto e sostituendo nella relazione del principio di conservazione dell'energia meccanica, si ha:

$$(m_1 + m_2) g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \right)^2$$

da cui, con i dati del problema, si ottiene il valore della velocità iniziale del proiettile:

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 g h} = \frac{0,01 + 3}{0,01} \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,07} \cong 353 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*Osservazione: i casi d'urto finora analizzati sono strettamente teorici, poiché, in realtà, non esistono corpi perfettamente elastici o perfettamente anelastici. In pratica, anche i corpi considerati perfettamente elastici durante l'urto subiscono delle perdite di energia, dovuta ad attriti interni; tali perdite hanno intensità nettamente inferiore a quelle dei corpi anelastici, in quanto non tutta l'energia potenziale elastica accumulata nell'urto è restituita sotto forma di energia cinetica. Pertanto i corpi reali si possono porre in posizione intermedia fra le due categorie ideali, di perfetta elasticità e di perfetta anelasticità, ricavando la seguente classificazione:*

- corpi anelastici;
- corpi non perfettamente elastici;
- corpi perfettamente elastici.

**POLIGLOTTA****Coefficiente d'urto**

GB: Impact coefficient

F: Coefficient d'impact

D: Stossfaktor

Lo studio dei fenomeni d'urto dei corpi reali si esegue introducendo un fattore, caratteristico dell'elasticità dei corpi, denominato **coefficiente d'urto** o **di restituzione**; esso assume valore nullo per i corpi perfettamente anelastici e valore unitario per i corpi perfettamente elastici.

Si consideri, per esempio, il caso dell'urto elastico di una massa  $m_1$  contro un muro di massa  $m_2$  esaminato in precedenza; il lavoro di deformazione, per il teorema delle forze vive, è dato da:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 \quad [2.52]$$

e ha valore nullo (urto elastico), come si può verificare sostituendo il valore della velocità finale di  $m_1$  dato dalla [2.42]:

$$v_{1f} = -v_{1i}$$

Per i corpi non perfettamente elastici, si può supporre che il lavoro di deformazione sviluppato durante l'urto sia una frazione dell'energia cinetica posseduta dal corpo che urta il muro prima dell'urto stesso:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

Scrivendo, pertanto, la [2.52] come:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \left( 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2} \right)$$

e indicando con il termine di coefficiente d'urto  $k$  il rapporto:

$$\frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

l'espressione del lavoro assume la seguente forma:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 (1 - k) \quad [2.53]$$

Tale espressione fornisce il lavoro speso durante l'urto di un corpo non perfettamente elastico contro un ostacolo fisso. Come si può notare, se il corpo fosse perfettamente elastico ( $k = 1$ ), il lavoro sarebbe nullo; mentre se il corpo fosse perfettamente anelastico ( $k = 0$ ), il lavoro assumerebbe il valore:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

ossia lo stesso valore dato dalla [2.51].

**RICHIAMO**

L'**altezza di rimbalzo** di un campione del materiale in esame è utilizzata per la misura della durezza nel metodo Shore.

Il coefficiente  $k$  è un numero sempre compreso fra 0 e 1, che cambia al variare dei materiali dei corpi fra i quali avviene l'urto.

La determinazione del valore di  $k$  si esegue sperimentalmente, misurando l'**altezza di rimbalzo** di una sfera che cade su una superficie piana orizzontale avente lo stesso materiale della sfera. La sfera, cadendo sul piano da un'altezza  $h_1$ , possiede la velocità:

$$v_{1i} = \sqrt{2 g h_1}$$

dopo l'urto rimbalza fino all'altezza  $h_2$ , cui corrisponde la velocità:

$$v_{1f} = \sqrt{2 g h_2}$$

allora il valore di  $k$  è:

$$k = \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = \frac{h_2}{h_1}$$

I valori più comuni di  $k$ , determinati con questo metodo, sono:

- $k = 8/9$ , per il vetro e l'avorio;
- $k = 5/9$ , per l'acciaio;
- $k = 1/2$ , per il legno.

Questi valori sono puramente indicativi e vanno interpretati come valori di larga massima, poiché al variare della qualità del materiale il coefficiente  $k$  può cambiare anche notevolmente.

Si noti che nel caso in cui i due corpi, non perfettamente elastici, siano entrambi in moto, le espressioni del lavoro date dalle relazioni [2.47] e [2.49] assumono, rispettivamente, la seguente forma:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} - v_{2i})^2 (1 - k) \quad [2.54]$$

e:

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} + v_{2i})^2 (1 - k) \quad [2.55]$$

## Dinamica dei corpi rigidi

La massa di un corpo, vincolato a ruotare attorno a un asse fisso nello spazio, non si può considerare concentrata nel baricentro e la velocità del baricentro non è la stessa di qualunque altro punto del corpo stesso; per tale corpo, dunque, non valgono le leggi della Dinamica del punto. Le leggi del moto dei corpi in rotazione sono dette **leggi della Dinamica dei corpi rigidi**.

- **Equazione fondamentale della Dinamica:** quando un corpo è in rotazione attorno a un asse fisso, la somma dei momenti  $\Sigma M$  delle forze esterne applicate al corpo è uguale al prodotto del momento d'inerzia assiale di massa  $J$  del corpo stesso per la sua accelerazione angolare  $\varepsilon$ .
- **Principio di D'Alembert:** nel caso generale in cui un corpo sia soggetto a un momento motore  $\bar{M}_m$  e a un momento resistente  $\bar{M}_r$ , introducendo la coppia d'inerzia  $(-J \bar{\omega})$ , l'equazione fondamentale della Dinamica assume una forma, detta **equazione dell'equilibrio dinamico** o **principio di D'Alembert**.
- **Momento d'inerzia assiale di massa di un corpo:** rappresenta l'inerzia dei corpi in rotazione, ossia la resistenza che essi oppongono alle variazioni del moto rotatorio. Ai fini del calcolo del momento d'inerzia assiale di massa, la massa totale di un corpo si può considerare concentrata a una determinata distanza  $\rho_i$  dall'asse di rotazione, in modo da ottenere lo stesso valore del momento d'inerzia; tale distanza è detta **raggio d'inerzia** e permette di calcolare il momento d'inerzia di un corpo esteso con la semplice relazione adottata per i corpi puntiformi.
- **Teorema del momento della quantità di moto:** considerando la durata dell'applicazione del momento di una forza o di una coppia che agisce su un corpo, si determina un legame fra momento d'inerzia e velocità angolare. Pertanto si definisce **momento dell'impulso** ( $M t$ ) il prodotto del momento per il tempo di applicazione e **momento della quantità di moto** ( $J \omega$ ) il prodotto del momento d'inerzia di massa per la velocità angolare. Il teorema del momento della quantità di moto afferma che il momento dell'impulso è uguale alla variazione del momento della quantità di moto del corpo.

## Lavoro ed energia

Il lavoro sviluppato da un corpo rigido in rotazione è dato dal prodotto del momento  $\bar{M}$  della forza o della coppia applicata per lo spazio angolare  $\theta$  percorso. Se i versi del momento e della rotazione sono concordi, il **lavoro** è **positivo** e il **momento** è detto **motore**; se invece i versi sono discordi, il **lavoro** è **negativo** e il **momento** è detto **resistente**.

L'energia cinetica  $E_c$  di un corpo rigido in rotazione, con velocità angolare  $\omega$  costante, è data dal semiprodotto del suo momento d'inerzia di massa  $J$  per il quadrato della sua velocità angolare  $\omega$ .

Secondo il **teorema dell'energia cinetica** (o **delle forze vive**) dei corpi rigidi in rotazione, il lavoro sviluppato dal momento  $\bar{M}$ , applicato a un corpo in moto rotatorio, è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso.

## Potenza nel moto di rotazione

La **potenza** sviluppata dal momento  $\bar{M}$  è data dal rapporto fra il lavoro compiuto e il tempo impiegato a compierlo, ovvero, si ottiene come prodotto del momento  $\bar{M}$  applicato per la velocità angolare  $\omega$  del corpo in rotazione.

## Corpi oscillanti attorno a un asse fisso

Un punto materiale, in moto oscillatorio attorno a un asse fisso, è detto **pendolo semplice**, mentre il moto oscillatorio di un corpo rigido è rappresentato dal **pendolo composto** o **pendolo fisico**.

Il **pendolo semplice** è un sistema ideale costituito da una massa puntiforme  $m$ , sospeso all'estremità di un filo inestensibile privo di massa e di lunghezza  $l$ ; l'altra estremità del filo è vincolata in un punto fisso O, detto **centro di sospensione**. Il pendolo semplice, di cui siano noti esattamente il periodo di oscillazione  $T$  e la lunghezza  $l$ , fornisce un mezzo utile per misurare il valore dell'accelerazione di gravità  $g$  a ogni latitudine.

Il momento d'inerzia di massa, rispetto a un asse baricentrico di un corpo rigido, è determinabile sperimentalmente facendolo oscillare come un pendolo su un piano verticale, attorno a un asse fisso non baricentrico. Il corpo oscillante nel modo descritto rappresenta un **pendolo fisico**. Tale sistema è detto anche **pendolo composto**, perché si può considerare costituito da tanti pendoli semplici quante sono le masse puntiformi che formano il corpo rigido.

## Sistemi di punti materiali isolati

Un sistema formato da due o più punti materiali, sottratto all'azione di forze esterne e soggetto solo a forze interne, si dice **sistema isolato**.

Sui sistemi di punti agiscono sempre forze interne, ossia quelle forze che concretizzano le azioni che i punti del sistema esercitano reciprocamente fra di loro.

Per i sistemi isolati vale il **principio di conservazione** della risultante e del momento risultante delle forze, della velocità del baricentro e della quantità di moto del sistema:

- le forze interne di un sistema isolato, per il principio di azione e reazione, costituiscono un sistema equilibrato, ossia la risultante e il momento risultante conservano il valore nullo;
- considerando la massa del sistema concentrata per intero nel suo baricentro (su cui si ritiene che agiscano tutte le forze) e non essendo

presenti forze esterne, il baricentro è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme e le forze interne, avendo risultante nulla, non influiscono sul moto del baricentro;

- la quantità di moto di un sistema può essere variata solo da forze esterne; infatti le forze interne, essendo uguali e contrarie, producono variazioni uguali e contrarie alla quantità di moto e quindi si annullano a vicenda. Pertanto le quantità di moto dei singoli punti materiali possono cambiare, ma la loro somma rimane costante se non sono presenti forze esterne, come afferma il **principio di conservazione della quantità di moto**.

## Urto fra due corpi

Una significativa applicazione della conservazione della quantità di moto riguarda il fenomeno dell'urto fra corpi.

Per **urto** s'intende la collisione fra due corpi che possono essere entrambi in moto oppure uno in moto e l'altro fermo.

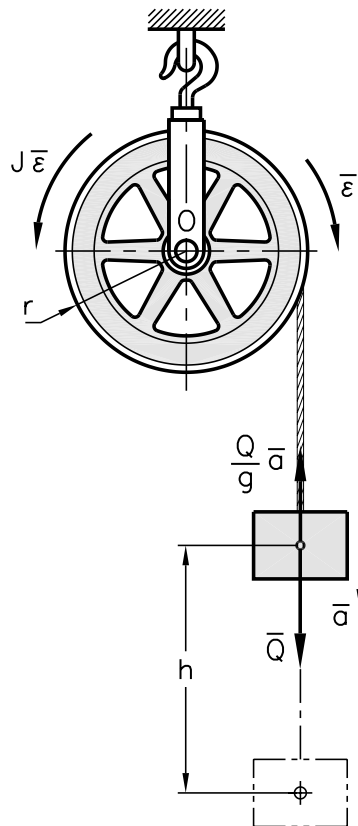
Gli urti sono solitamente classificati a seconda che in essi rimanga invariata o meno l'energia cinetica: se questa rimane invariata, l'**urto** viene detto **elastico**; se varia, l'urto viene detto **anelastico** (non elastico).

Nell'urto **unidimensionale**, detto anche **urto centrale** o **normale**, il moto relativo prima e dopo l'urto avviene lungo la medesima linea retta passante per i baricentri dei due corpi.

1. Un tamburo cilindrico, di diametro  $d = 350$  mm e momento d'inerzia assiale di massa  $J = 3,2$  kg m<sup>2</sup>, ruota attorno al proprio asse geometrico alla frequenza di rotazione  $n_1 = 125$  giri/min. Calcolare la forza periferica  $\bar{F}_t$  che occorre applicare al tamburo per fargli raggiungere, in 5 secondi, la frequenza di rotazione  $n_2 = 350$  giri/min.
2. Un rullo cilindrico, di diametro  $d = 500$  mm, è posto in rotazione per mezzo di una coppia motrice, di momento  $M = 590$  N m. Sapendo che il rullo, partendo da fermo ( $\omega_1 = 0$ ), raggiunge la velocità angolare  $\omega_2 = 21$  rad/s nel tempo  $t = 12$  s e che il materiale di cui è costituito è acciaio (massa volumica  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>), determinare la sua lunghezza.
3. Il sistema della **figura 2.20** è costituito da una puleggia di raggio  $r = 300$  mm, su cui è avvolta una fune; all'estremità della fune è appeso un carico  $Q = 15$  daN che, partendo da fermo, si abbassa del tratto  $h = 11$  m in un tempo  $t = 2,5$  s. Calcolare il peso  $\bar{Q}'$  della puleggia.

Fig. 2.20

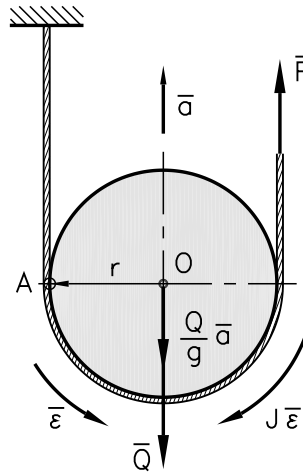
Rappresentazione di una puleggia su cui è avvolta una fune con un carico appeso.



4. Un corpo cilindrico, di massa  $m = 20$  kg e diametro  $d = 400$  mm, è sollevato per mezzo di una fune avvolta attorno a esso, come rappresentato nella **figura 2.21**. Sapendo che la forza di sollevamento è  $F = 135$  N, determinare l'accelerazione angolare  $\epsilon$  del cilindro e l'accelerazione lineare  $a$  del suo baricentro.

Fig. 2.21

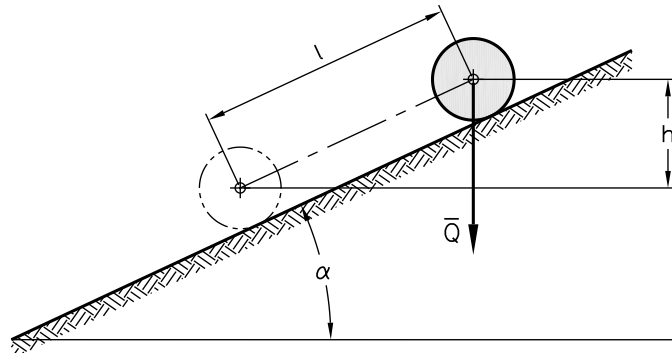
Rappresentazione di un corpo cilindrico sollevato mediante una fune.



5. Un cilindro, di diametro  $d = 500$  mm, rotola lungo un piano inclinato dell'angolo  $\alpha = 30^\circ$  (► Fig. 2.22). Sapendo che il cilindro parte da fermo, determinare la velocità angolare che esso raggiunge dopo avere percorso il tratto  $l = 4,5$  m.

Fig. 2.22

Rappresentazione di un cilindro che rotola, per effetto della forza di gravità, su un piano inclinato.



6. Un cilindro di ghisa, di diametro  $d = 280$  mm e lunghezza  $l = 700$  mm, ruota alla frequenza di rotazione  $n_1 = 350$  giri/min. Sapendo che la massa volumica della ghisa è  $\rho = 7100$  kg/m<sup>3</sup>, calcolare il valore del momento da applicare al cilindro affinché raggiunga la frequenza di rotazione  $n_2 = 500$  giri/min nel tempo  $t = 2$  s.
7. Un gruppo motore-macchina operatrice funziona a regime alla frequenza di rotazione  $n = 1000$  giri/min e per impedirne l'arresto brusco, in caso di fermata improvvisa del motore, al gruppo è collegato un volano. Sapendo che per portare il volano da fermo alla velocità di regime occorre impiegare una potenza  $P = 4,5$  kW per un tempo  $t = 20$  s e che il momento della coppia frenante del gruppo, a motore fermo, è  $M = 390$  N m, determinare il numero di giri compiuti dal volano prima di fermarsi e il tempo impiegato.
8. Un volano, con momento d'inerzia assiale di massa  $J = 15$  kg m<sup>2</sup>, ruota con velocità angolare  $\omega_1 = 104$  rad/s. Applicandogli una coppia motrice di momento  $\bar{M}$ , raggiunge la velocità angolare  $\omega_2 = 141$  rad/s, dopo avere compiuto 95 giri. Calcolare il valore del momento  $\bar{M}$  della coppia motrice.



9. Una ruota dentata, di diametro  $d = 146$  mm, trasmette una potenza  $P = 9,5$  kW. Se lo sforzo tangenziale della ruota è  $F = 2950$  N, calcolare la sua velocità angolare e la coppia motrice trasmessa.
10. Un proiettile, di peso  $Q_1 = 0,5$  N, è sparato contro una tavoletta di legno di peso  $Q_2 = 6$  N, appoggiata su un piano ( $v_{2i} = 0$ ). Sapendo che la velocità del proiettile è  $v_{1i} = 600$  m/s, calcolare la velocità  $v_{2f}$  con cui si sposta la tavoletta dopo che il proiettile la colpisce e vi rimane conficcato ( $v_{2f} = v_{1f}$ ).
11. Due carrelli, di peso  $Q_1 = 500$  daN e  $Q_2 = 300$  daN, si muovono con velocità  $v_1 = 3,5$  m/s e  $v_2 = 2,5$  m/s, nella stessa direzione e nello stesso verso (► Fig. 2.23). Considerando l'urto perfettamente elastico, determinare le velocità dei due carrelli dopo l'urto.

**Fig. 2.23**

Rappresentazione di due carrelli di massa diversa che si muovono nella stessa direzione con velocità di diversa intensità, ma uguale verso.

