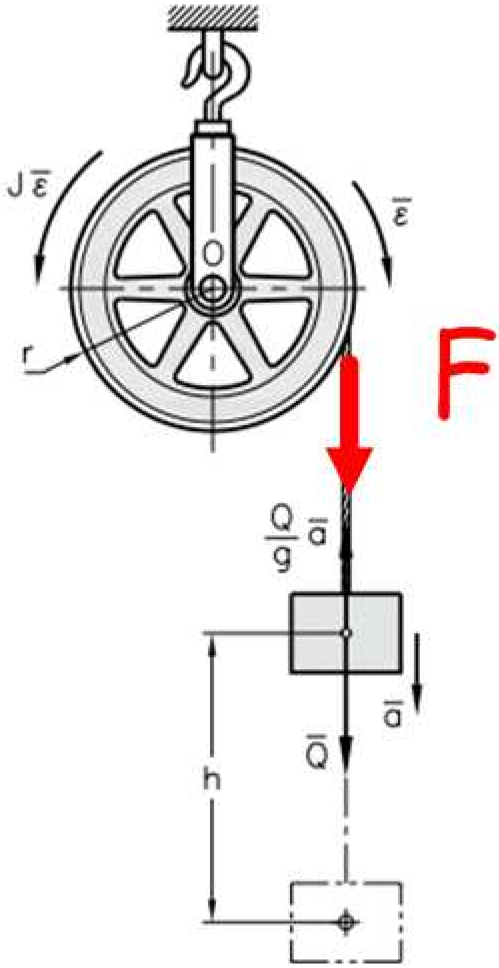
3. Il sistema della *figura 2.20* è costituito da una puleggia di raggio r = 300 mm, su cui è avvolta una fune; all'estremità della fune è appeso un carico Q = 15 daN che, partendo da fermo, si abbassa del tratto h = 11 m in un tempo t = 2,5 s. Calcolare il peso $\bar{Q}'$ della puleggia.



SOLUZIONE

1 Calcolo del lavoro compiuto

1.1 Metodo uno per il calcolo del lavoro (il più semplice)

$$L = F \cdot x = 150N \cdot 11m = 1650\,J$$

$$P = \frac{L}{t} = \frac{1650\,J}{2,5\,s} = 660\,W$$

1.2 Metodo due per il calcolo del lavoro

M: Coppia motrice

La coppia si può calcolare con la seguente formula:

$$M = F \cdot braccio = F \cdot r = 150N \cdot 0{,}3m = 45\ Nm$$

α (Alfa) : Angolo sviluppato in 2,5 secondi

Se la fune percorre 11 m su una puleggia di raggio 0,3 metri allora il numero di giri fatto si può calcolare con riferimento ad una angolo giro che corrisponde alla lunghezza della circonferenza (2*π*r).

$\alpha = \frac{11}{circonferenza} = \frac{11}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{11}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3} = 5{,}83\ giri$ (in 2,5 secondi !!)

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{5{,}83\ \cdot 2 \cdot \pi\ rad}{2{,}5\ s} = 14{,}64\ \frac{rad}{s}$$

Si poteva anche calcolare la velocità angolare sapendo la velocità tangenziale.

V= spazio / tempo quindi $v = \frac{11\ m}{2{,}5\ s} = 4{,}4\ \frac{m}{s}$

Se $v = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r} \rightarrow \omega = \frac{4{,}4\ \frac{m}{s}}{0{,}3\ m} = 14{,}66\ \frac{rad}{s}$

ε (epsilon): Accelerazione angolare

$$\varepsilon = \frac{\omega_{finale} - \omega_{iniziale}}{t_{finale} - t_{iniziale}} = \frac{14{,}64 \frac{rad}{s} - 0\ \ rad/s}{2{,}5\ s} = 5{,}85\ \frac{rad}{s^2}$$

Verifichiamo la potenza: $P = M \cdot \omega = 45\ Nm\ \cdot 14{,}64 \frac{rad}{s} = 660\ W$

$$quindi\ corrisponde\ e\ si\ poteva\ calcolare\ anche\ così.$$

$$L = M \cdot \alpha \rightarrow L = 45\ Nm \cdot 5{,}83 \cdot 2\pi\ rad \cong 1650\ J$$

2 Calcolo momento di inerzia assiale di massa

La velocità angolare l'abbiamo già calcolata al punto 1.2 quindi la consideriamo già nota. **ATTENZIONE**: Si potrebbe pensare di calcolare il momento di inerzia assiale di massa considerando la seguente formula del lavoro:

$L = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$ ma sarebbe “valida” se avessimo un regime stazionario o costante. In realtà il nostro esempio è in regime transitorio che parte da fermo fino ad un certo valore. Il momento di inerzia assiale di massa si calcola con la seguente formula:

$$M = I \cdot \varepsilon \rightarrow I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{45\ Nm}{5{,}85\ \frac{rad}{s^2}} = 7{,}69\ kg \cdot m^2$$

Con l’ipotesi che tutta la massa sia distribuita sulla corona circolare esterna avente raggio 0,3 metri risulta (formula cilindro cavo di piccolo spessore a pagina 261 del libro) :

$$I = m \cdot r^2 \rightarrow m = \frac{I}{r^2} = \frac{7{,}69\ kg \cdot m^2}{(0{,}3\ m)^2} = \frac{7{,}69\ kg \cdot m^2}{0{,}09 \cdot m^2} \cong 85{,}4\ kg$$

Diversamente se la puleggia fosse assimilabile ad un disco pieno il suo momento di inerzia assiale di massa sarebbe:

$$I = m \cdot \frac{d^2}{8} \rightarrow I = m \cdot \frac{(2r)^2}{8} \rightarrow I = m \cdot \frac{r^2}{2}$$

Quindi : $m = \frac{2I}{r^2} = \frac{2 \cdot 7{,}69\ kg \cdot m^2}{(0{,}3\ m)^2} = \frac{2 \cdot 7{,}69\ kg \cdot m^2}{0{,}09 \cdot m^2} \cong 171\ kg$

FINE