Esercizi svolti

A. **Un giocatore di biliardo colpisce con la sua stecca una pallina di 160 g che a sua volta ne colpisce un'altra ferma avente una massa di 60 g con velocità pari a 0,8 m/s. Determinare la velocità delle due palline dopo l'urto che viene considerato di tipo elastico.**

■ SOLUZIONE

Applicando il principio di conservazione della quantità di moto avremo che:

$$m_A \cdot v = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$$

Nell'urto elastico anche l'energia elastica si conserva; pertanto:

$$\frac{1}{2} m_A \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2$$

$$v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \cdot v \qquad v_A = \frac{160 - 60}{160 + 60} \cdot 0{,}8 \qquad v_A = 0{,}36 \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} \cdot v \qquad v_B = \frac{2m \cdot 60}{160 + 60} \cdot 0{,}8 \qquad v_B = 1{,}16 \text{ m/s}$$

B. **Determinare la velocità finale e l'energia cinetica prima dell'urto posseduta da due corpi anelastici aventi massa rispettivamente di 30 kg e 45 kg, che si muovono nello stesso verso con velocità di 13 m/s e 6 m/s su una stessa traiettoria.**

■ **SOLUZIONE**

Calcolo della velocità finale:

$$v = \frac{m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B}{m_A + m_B}$$

$$v = \frac{30 \cdot 13 + 45 \cdot 6}{30 + 45} = 8{,}8 \text{ m/s}$$

Calcolo dell'energia cinetica:

$$E_c = \frac{1}{2} m_A \cdot v_A^2 \cdot \frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} 30 \cdot 13^2 \cdot \frac{1}{2} 45 \cdot 6^2 = 3345 \text{ J}$$

Esercizi e test

CONOSCENZA

1. Attraverso quale formula si determina la velocità di due masse dopo l'urto centrale diretto di due corpi anelastici?

a) $v = \dfrac{m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B}{m_A \cdot v_A}$

b) $v = \dfrac{m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B}{m_A + m_B}$

c) $v = \dfrac{m_A \cdot v_A + m_a + m_B}{m_A + m_B}$

d) $v = \dfrac{m_A + m_B}{m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B}$

(R = b)

APPLICAZIONE

2. Un oggetto avente la massa di 50 kg viene lanciato con velocità di 15 m/s nella direzione di avanzamento di un autocarro, la cui massa è di 1800 kg, che si muove alla velocità di 60 km/h. Determinare la velocità dell'autocarro dopo il lancio e la relativa spinta, considerando che lo stesso lancio è avvenuto nel tempo di 0,6 secondi.

(v = 63,144 km/h; F = 2610 N)

CONOSCENZA

3. Nel caso in cui il corpo urtato sia fermo, quanto vale la velocità di due corpi anelastici?

a) $v = \dfrac{m_2}{m\,(1 - v_1)}$

b) $v = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot v_1}$

c) $v = \dfrac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$

d) $v = \dfrac{m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$

(R = c)

Applicazione

4. Determinare la velocità con cui si sposteranno insieme due corpi anelastici di massa 30 kg e 50 kg, e quale sarà il valore dell'energia trasformata in calore. Si consideri che i due corpi si muovono su una traiettoria rettilinea, nella stessa direzione e verso con velocità di 14 m/s e 6 m/s.

(v = 9 m/s; differenza di energia cinetica = 600 J)

Comprensione

5. Se due corpi di tipo elastico si urtano urto, cosa succede?

a) Avvengono deformazioni di tipo permanente.

b) Avvengono deformazioni permanenti e si hanno variazioni di energia cinetica.

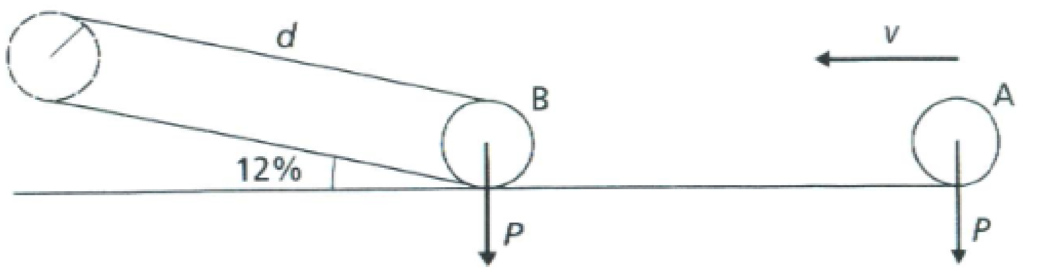
c) Avvengono deformazioni permanenti e si hanno variazioni della quantità di moto.

d) Non esistono deformazioni permanenti e si conservano sia la quantità di moto che le energie cinetiche.

(R = d)

Applicazione

6. Una pallina di acciaio di massa m è in movimento su un piano orizzontale alla velocità di 7 m/s. Dopo un breve tragitto incontra una seconda pallina di acciaio ferma di eguale massa, posta all'inizio di un tragitto che presenta una pendenza del 12%. Determinare il tragitto che la seconda pallina ha compiuto qualora l'urto sia di tipo elastico.



(s = 20,83 m)

COMPRENSIONE

7. Come si determina la velocità finale che assume un corpo 1 dopo l'urto con un altro corpo 2? (Si ricordi che i due corpi sono elastici e che si muovono nella stessa direzione e nello stesso verso.)

a) $v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2\, m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

b) $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot v_2 + 2\, m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$

c) $v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 - 2\, m_1 \cdot v_1}{m_1 - m_2}$

d) $v_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}$

(R = a)

APPLICAZIONE

8. Un vagone contenente del ferro e avente una massa di 1,5 t investe alla velocità di 8 m/s un altro vagone di massa 2,2 t che viaggia in verso opposto alla velocità di 5 m/s. Determinare la velocità con cui i due vagoni si sposteranno dopo l'urto.

(v_1 = – 7,46 m/s; v_2 = 5,54 m/s)

Esercizio 1

Da un'auto di massa m_1 = 900 kg, *che si muove alla velocità di* 50 km/h, *viene lanciato un oggetto di massa* m_2 = 30 kg, *nel verso opposto a quello di marcia dell'auto, con velocità* v_2 = 10 m/s.
Calcolare la velocità dell'auto dopo il lancio e la spinta che ha agito su di essa, sapendo che il lancio è stato effettuato nel tempo di 0,4 s.

Il sistema costituito dalle masse dell'auto e dell'oggetto si può considerare come un sistema sul quale agiscono soltanto forze interne e pertanto vale per esso il principio della conservazione della quantità di moto.
Detta v_0 la velocità iniziale del sistema e v_1 la velocità raggiunta dall'auto dopo il tempo t = 0,4 s, quest'ultima si ricava allora dall'uguaglianza:

$$(m_1 + m_2) \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2$$

il primo membro della quale è la quantità di moto iniziale del sistema e il secondo membro la quantità di moto del sistema al termine dell'intervallo di tempo t.
Da essa si ricava:

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_0 + m_2 \cdot v_2}{m_1}$$

Essendo v_0 = 50 km/h = 13,9 m/s, con i valori dati si ottiene:

$$v_1 = \frac{(900 + 30) \cdot 13{,}9 + 30 \cdot 10}{900} =$$

$$= 14{,}7 \text{ m/s} = 52{,}9 \text{ km/h}$$

La velocità dell'auto è quindi aumentata di 2,9 km/h.
La spinta F che ha agito sull'auto si ricava applicando il teorema della quantità di moto, espresso dalla relazione:

$$F \cdot t = m_1 \, (v_1 - v_0)$$

risulta quindi:

$$F = m_1 \cdot \frac{(v_1 - v_0)}{t}$$

e con i valori numerici:

$$F = 900 \cdot \frac{14{,}7 - 13{,}9}{0{,}4} = 1\,800 \text{ N}$$

Esercizio 2

Dall'auto dell'esercizio 1, lo stesso oggetto viene lanciato ora nello stesso verso di marcia dell'auto con velocità relativa $w_2 = 12$ m/s.
Calcolare la velocità dell'auto dopo il lancio e la variazione di energia cinetica del sistema.

In questo caso indichiamo con:

$$u_0 = 50 \text{ km/h} = 13{,}9 \text{ m/s}$$

la velocità (di trascinamento) iniziale dell'auto. La velocità (assoluta) dell'oggetto sarà pertanto:

$$v_2 = u_0 + w_2 = 13{,}9 + 12 = 25{,}9 \text{ m/s}$$

Per il principio di conservazione della quantità di moto si avrà:

$$(m_1 + m_2) \cdot u_0 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot v_2$$

Da essa si ricava:

$$u_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u_0 - m_2 \cdot v_2}{m_1}$$

$$= \frac{930 \cdot 13{,}9 - 30 \cdot 25{,}9}{900} = 13{,}5 \text{ m/s} = 48{,}6 \text{ km/h}$$

La velocità dell'auto è quindi diminuita di 1,4 km/h. L'energia cinetica iniziale del sistema è data da:

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u_0^2 = \frac{1}{2}(900 + 30) \cdot 13{,}9^2 = 89\,843 \text{ Nm}$$

e quella finale risulta:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 13{,}5^2 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25{,}9^2 =$$

$$= 82\,012 + 10\,062 = 92\,074 \text{ Nm}$$

Ne consegue per il sistema una variazione di energia cinetica:

$$92\,074 - 89\,843 = 2\,231 \text{ Nm}$$

Esercizio 3

Un carrello di massa $m_1 = 200$ kg e un carrello di massa $m_2 = 300$ kg, inizialmente fermi e distanti 40 m, vengono tirati l'uno verso l'altro con una forza $F = 500$ N.
Determinare la posizione di ciascuno dei due carrelli dopo 3 s e in quale posizione e dopo quanto tempo essi si congiungono.
Verificare se in ciascuno dei due istanti è soddisfatto il principio del moto del baricentro.

Schematizziamo il sistema costituito dai due carrelli come indicato in figura, assumendo come origine il baricentro del primo carrello ($O \equiv G_1$).
Com'è noto, la coordinata x_G del baricentro è data da:

$$x_G = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

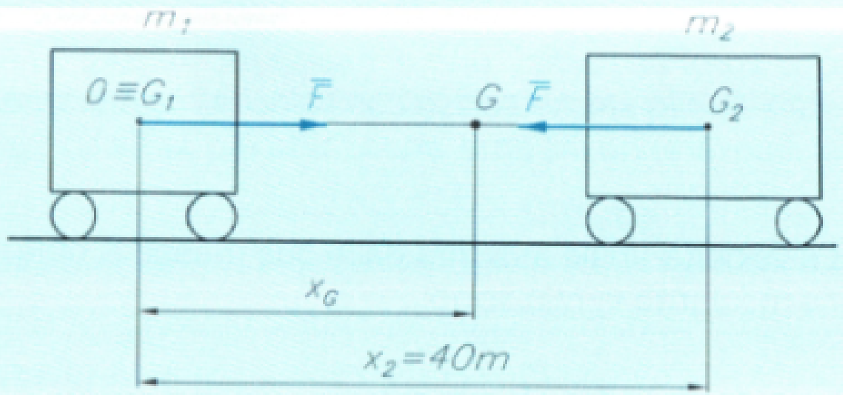
Essendo in questo caso:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 40 \text{ m}$$

si ottiene:

$$x_G = \frac{0 + 300 \cdot 40}{500} = 24 \text{ m}$$



Sotto l'azione della forza F i due carrelli si muovono l'uno verso l'altro di moto uniformemente accelerato. Le accelerazioni impresse da F valgono rispettivamente:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{500}{200} = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{500}{300} = 1{,}7 \text{ m/s}^2$$

e le equazioni del moto sono:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$$

$$s_2 = s_{02} - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

Essendo $S_{02} = x_2 = 40$ m, al tempo $t = 3$ s i valori degli spazi percorsi risultano:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 3^2 = 11{,}25 \text{ m}$$

$$s_2 = 40 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}7 \cdot 3^2 = 32{,}35 \text{ m}$$

Quando i due carrelli si congiungono sarà:

$$s_1 = s_2$$

cioè:

$$\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = s_{02} - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

Da quest'ultima relazione si ricava:

$$\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \right) \cdot t^2 = s_{02}$$

$$t = \sqrt{\frac{s_{02}}{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}}}$$

Con i valori numerici risulta:

$$t = \sqrt{\frac{40}{1{,}25 + 0{,}85}} = 4{,}36 \text{ s}$$

e quindi:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 4{,}36^2 = 23{,}81 \text{ m}$$

$$s_2 = 40 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}7 \cdot 4{,}36^2 = 23{,}81 \text{ m}$$

Il principio del moto del baricentro è senz'altro soddisfatto, in quanto i baricentri dei carrelli coincidono e quindi coincide con essi anche il baricentro del sistema. Resta allora soltanto da effettuare la verifica per $t = 3$ s. A questo istante risulta:

$$x'_1 = s_1 = 11{,}25 \text{ m}$$

$$x'_2 = s_2 = 32{,}35 \text{ m}$$

e quindi:

$$x'_G = \frac{m_1 \cdot x'_1 + m_2 \cdot x'_2}{m_1 + m_2} = \frac{200 \cdot 11{,}25 + 300 \cdot 32{,}35}{500} = 24 \text{ m} = x_G$$

Anche in questo istante il principio del moto del baricentro risulta pertanto soddisfatto.

Esercizio 4

Due corpi anelastici, uno di massa $m_1 = 25$ kg e l'altro di massa $m_2 = 40$ kg, si muovono lungo la stessa retta e nello stesso senso con velocità rispettivamente di 12 m/s e di 5 m/s. Calcolare con quale velocità si muoveranno insieme dopo l'urto e quanta energia si è trasformata in calore.

La velocità finale assunta dalle due masse si ottiene mediante la relazione:

$$V = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \qquad 12.11)$$

Con i valori numerici risulta:

$$V = \frac{25 \cdot 12 + 40 \cdot 5}{65} = 7{,}69 \text{ m/s}$$

L'energia cinetica posseduta dal sistema prima dell'urto vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 5^2 = 2\,300 \text{ J}$$

e dopo l'urto:

$$E'_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot (25 + 40) \cdot 7{,}69^2 = 1\,922 \text{ J}$$

per cui l'energia trasformata in calore è:

$$E_c - E'_c = 2\,300 - 1\,922 = 378 \text{ J}$$

Questa energia si poteva anche calcolare direttamente con i valori noti in partenza, cioè senza dover calcolare la velocità finale, mediante la relazione nota:

$$E_c - E'_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2 \qquad 12.15)$$

Con i dati fornitici risulta:

$$E_c - E'_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 40}{25 + 40} \cdot (12 - 5)^2 = 7{,}69 \cdot 7^2 = 378 \text{ J}$$

cioè lo stesso valore trovato prima.

Esercizio 5

Calcolare la velocità finale e la quantità di energia trasformata in calore nell'ipotesi che i due corpi dell'esercizio precedente si muovano con le stesse velocità lungo la stessa retta, ma andandosi incontro.

In questo caso le relazioni 12.11) e 12.15) assumono la forma:

$$V = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \qquad 12.11')$$

$$E_c - E_c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(v_1 + v_2\right)^2 \qquad 12.15')$$

Si ottiene pertanto:

$$V = \frac{25 \cdot 12 - 40 \cdot 5}{65} = 1{,}54 \text{ m/s}$$

$$E_c - E_c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 40}{25 + 40} \cdot \left(12 + 5\right)^2 = 7{,}69 \cdot 17^2 = 2\,222 \text{ J}$$

Dal confronto con i risultati dell'esercizio 4 si nota che gli effetti negativi di un «urto frontale» sono maggiori di quelli di un «tamponamento». Nel primo caso il lavoro di deformazione cresce di circa sei volte e la velocità finale si riduce a circa un quinto.

Esercizio 6

Due corpi elastici, uno di massa $m_1 = 6$ kg e l'altro di massa $m_2 = 4$ kg si muovono incontro con le velocità rispettive $v_1 = 8$ m/s e $v_2 = 10$ m/s.
Calcolare la velocità che ciascuno di essi assumerà dopo l'urto e verificare che la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema dopo l'urto coincidano con quelle che il sistema possedeva prima dell'urto.

Per quanto concerne le formule delle velocità finali 12.25) e 12.26), occorre osservare che sono state ricavate nel caso in cui i due corpi si muovano nella stessa direzione e nello stesso verso.
Quando i corpi si vanno incontro esse si modificano nel modo seguente:

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 - 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \qquad 12.25')$$

$$V_2 = \frac{-(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \qquad 12.26')$$

Nel caso in esame risulta pertanto:

$$V_1 = \frac{2\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10}{10} = -6{,}4 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{2\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 8}{10} = 11{,}6 \text{ m/s}$$

La quantità di moto del sistema prima dell'urto vale:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 6 \cdot 8 - 4 \cdot 10 = 8 \text{ Ns}$$

e quella dopo l'urto:

$$-m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = -6 \cdot 6{,}4 + 4 \cdot 11{,}6 = 8 \text{ Ns}$$

L'energia cinetica del sistema prima dell'urto risulta:

$$\frac{1}{2}m_1\cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\cdot v_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^2 = 392 \text{ J}$$

e quella dopo l'urto:

$$\frac{1}{2}m_1\cdot V_1^2 + \frac{1}{2}m_2\cdot V_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6{,}4^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11{,}6^2 = 392 \text{ J}$$

I due principi di conservazione risultano pertanto verificati.

Esercizio 7

Due sfere di materiale perfettamente elastico e di dimensioni trascurabili si incontrano ad angolo retto. Sapendo che una ha massa $m_1 = 4$ kg e velocità $v_1 = 5$ m/s e l'altra ha massa $m_2 = 8$ kg e velocità $v_2 =$ 10 m/s, calcolare il vettore velocità di ciascuna sfera dopo l'urto e verificare la validità del principio di conservazione della quantità di moto e del principio di conservazione dell'energia cinetica.

Indicata con n la direzione della congiungente dei due baricentri delle sfere e con t la direzione ad essa normale, si vede che le due velocità v_1 e v_2 formano con ciascuna di esse l'angolo $\alpha = 45°$ (→ figura A).

In figura le sfere sono disegnate separate per rendere chiara la scomposizione dei vettori velocità v_1 e v_2.

Le componenti delle due velocità secondo le direzioni n e t valgono pertanto:

$$v_{1n} = v_1 \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos 45° = 3{,}535 \text{ m/s}$$

$$v_{1t} = v_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 5 \cdot \operatorname{sen} 45° = 3{,}535 \text{ m/s}$$

$$v_{2n} = v_2 \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 45° = 7{,}07 \text{ m/s}$$

$$v_{2t} = v_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 10 \cdot \operatorname{sen} 45° = 7{,}07 \text{ m/s}$$

Le componenti v_{1t} e v_{2t} non subiscono variazioni per effetto dell'urto, mentre le componenti v_{1n} e v_{2n} subiscono variazioni che si possono calcolare mediante le relazioni 12.25') e 12.26').

Per la prima sfera risulta:

$$V_{1n} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_{1n} - 2\, m_2 \cdot v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{(4-8) \cdot 3{,}535 - 2 \cdot 8 \cdot 7{,}07}{12} = -10{,}605 \text{ m/s}$$

Il vettore velocità $\bar{V}_1$ ha pertanto intensità:

$$V_1 = \sqrt{V_{1n}^2 + v_{1t}^2} = \sqrt{10{,}605^2 + 3{,}535^2} = 11{,}18 \text{ m/s}$$

Per la seconda sfera risulta:

$$V_{2n} = \frac{-(m_2 - m_1) \cdot v_{2n} + 2 \cdot m_1 \cdot v_{1n}}{m_1 + m_2} = \frac{-(8-4) \cdot 7{,}07 + 2 \cdot 4 \cdot 3{,}535}{12} = 0$$

il vettore velocità $\bar{V}_2$ ha quindi intensità:

continuare da soli ...

Esercizio 4

Calcolare la massima velocità alla quale l'auto rappresentata in figura A può percorrere una curva piana di raggio $r = 40$ m senza pericolo di ribaltamento.
Stabilire poi il valore della sopraelevazione s che occorrerebbe dare alla carreggiata per far sì che l'auto possa percorrere la curva con una velocità superiore di 15 km/h a quella massima calcolata senza ribaltarsi e senza slittare. I dati sono: $h = 0{,}63$ m; $b = 1{,}40$ m; $c = 8$ m; $r = 40$ m.

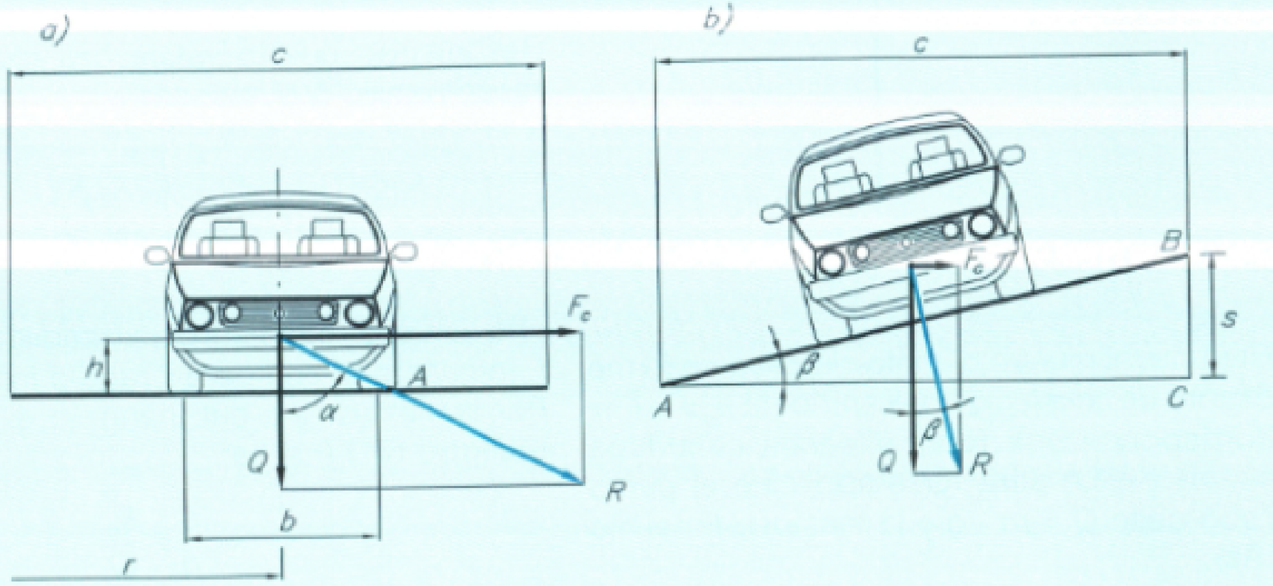


Fig. A

<u>SOLUZIONE:</u>
velocità massima= 20,88 m/s

sopraelevazione = 12, 74 m