Esercizi sul moto del proiettile

Risolvi gli esercizi sul quaderno utilizzando la soluzione solo per controllare il tuo risultato.

1

Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di $30\,m$. Il proiettile colpisce il bersaglio $1.9\,cm$ sotto il centro. Determinare il tempo di volo del proiettile e la velocità alla bocca del fucile.

Soluzione:: possiamo riferirci sempre alla figura dell'esercizio precedente. La traiettoria è di tipo parabolico e quindi mirando orizzontalmente il proiettile cadrà verso il basso di $1.9\,cm$ sotto l'azione dell'accelerazione di gravità, g. Anche qui la $v_{y0} = 0$. Quindi

$$y - y_0 = 1.9 \cdot 10^{-2}\,m = 4.9\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2\,s^2$$

da cui, risolvendo rispetto a t e considerando la soluzione positiva

$$t = \sqrt{\frac{1.9 \cdot 10^{-2}\,m}{4.9\,\frac{m}{s^2}}} = 0.062\,s$$

per calcolare la velocità iniziale, osserviamo che essa è dovuta solamente alla componente orizzontale. Quindi il proiettile percorre $30\,m$ in $0.062\,s$ con un moto rettilineo uniforme. Pertanto

$$v = \frac{30\,m}{0.062\,s} = 482\,\frac{m}{s}$$

2

Gli elettroni possono essere sottoposti a caduta libera. Se un elettrone è proiettato orizzontalmente alla velocità di $3.0 \cdot 10^6\,m/s$, quanto cadrà percorrendo $1.0\,m$ di distanza orizzontale?

Soluzione:: il disegno riproduce schematicamente il significato di caduta, cioè la componente verticale del moto descritta da un moto uniformemente accelerato. La componente orizzontale è invece descritta da un moto rettilineo uniforme, per cui

$$\triangle t = \frac{\triangle s}{v} = \frac{1\,m}{3.0 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}} = 3.3 \cdot 10^{-7}\,s$$

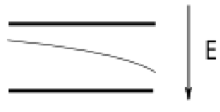
in questo intervallo di tempo l'elettrone percorrerà un tratto verticale (caduta) di

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(3.3 \cdot 10^{-7}\,s\right)^2 = 5.45 \cdot 10^{-13}\,m$$

Se la velocità orizzontale aumentasse l'elettrone percorrerebbe $1\,m$ in un tempo inferiore e quindi la sua caduta sarebbe minore.

3

In un tubo a vuoto un fascio di elettroni è proiettato orizzontalmente alla velocità di $1.0 \cdot 10^9\,cm/s$ nella zona compresa fra due piatti orizzontali quadrati di lato $2.0\,cm$, ai quali è applicato un campo elettrico che accelera gli elettroni con una accelerazione costante e diretta verso il basso di $1.0 \cdot 10^{17}\,cm/s^2$. Trovare (a) il tempo impiegato dagli elettroni per attraversare il campo, (b) lo spostamento verticale del raggio di elettroni nel passaggio tra i due piatti (che non tocca) e (c) la velocità del raggio all'uscita dal campo.



Caso: (a): gli elettroni devono percorrere un tratto orizzontale (componente) di $2.0\,cm$. Quindi

$$t = \frac{2.0\,cm}{1.0 \cdot 10^9\,\frac{cm}{s}} = 2.0 \cdot 10^{-9}\,s$$

Caso: (b): lo spostamento verticale, cioè la componente verticale del moto, rappresenta ancora la caduta del fascio di elettroni sotto l'azione dell'accelerazione prodotta dal campo (la caduta libera può considerarsi trascurabile osservando l'ordine di grandezza della accelerazione prodotta dal campo elettrico):

$$s = \frac{1}{2} \cdot 1.0 \cdot 10^{17}\,\frac{cm}{s^2} \cdot \left(2.0 \cdot 10^{-9}\right)^2\,s^2 = 0.2\,cm$$

Caso: (c): la velocità è data dal contributo delle due componenti. La componente orizzontale, v_x, rimane invariata, mentre la v_y può essere calcolata attraverso la relazione del moto accelerato uniformemente

$$v = v_0 + at = 0 + 1.0 \cdot 10^{17}\,\frac{cm}{s^2} \cdot 2.0 \cdot 10^{-9}\,s = 2.0 \cdot 10^8\,\frac{cm}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(1.0 \cdot 10^9\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(2.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2} = 1.0 \cdot 10^9\,\frac{cm}{s}$$

esprimendola vettorialmente sarà

$$\overrightarrow{v} = \left(1.0 \cdot 10^9\,\overrightarrow{i} - 2.0 \cdot 10^8\,\overrightarrow{j}\right)\,\frac{cm}{s}$$

4

Una palla rotola orizzontalmente fuori dal bordo di un tavolo alto $1.20\,m$ e cade sul pavimento alla distanza orizzontale di $1.50\,m$ dal bordo del tavolo. Calcolare il tempo di volo della palla e la velocità all'istante in cui ha lasciato il tavolo.

Soluzione:: il moto di caduta verso il basso è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$; il dislivello è di $1.20\,m$. Calcoliamo il tempo di percorrenza, sapendo che la componente verticale iniziale della velocità è nulla,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.40\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 0.50\,s$$

Durante questo intervallo di tempo la palla è avanzata in direzione orizzontale di $1.50\,m$ di moto rettilineo uniforme e quindi la velocità iniziale è la velocità costante del moto

$$v = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{1.50\,m}{0.5\,s} = 3.0\,\frac{m}{s}$$

5

Un proiettile viene sparato orizzontalmente da un'arma posta a $45.0\,m$ sopra un terreno orizzontale. La sua velocità alla bocca dell'arma è $250\,m/s$. Calcolare il tempo di volo, a che distanza orizzontale raggiungerà il terreno e il modulo della componente verticale della velocità quando colpisce il terreno.

Soluzione:: il tempo di volo si calcola tenendo conto del moto accelerato di caduta, con velocità iniziale $250\,m/s$ e velocità finale nulla

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45.0\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 3.03\,s$$

il calcolo della distanza orizzontale si basa sul moto rettilineo uniforme della componente orizzontale del moto

$$x = vt = 250\,\frac{m}{s} \cdot 3.03\,s = 758\,m$$

la componente verticale della velocità è quella acquisita nella caduta libera

$$v = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 45.0\,m \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 29.7\,\frac{m}{s}$$

6

Una palla da baseball viene lanciata verso il battitore orizzontalmente a una velocità iniziale di $160\,km/h$. La distanza a cui si trova il battitore è $18\,m$. Calcolare il tempo impiegato a coprire i primi $9\,m$ in orizzontale; I rimanenti $9\,m$; La caduta dovuta alla gravità nei primi $9\,m$ in orizzontale e nei rimanenti $9\,m$.

Soluzione:: la velocità iniziale, trasformata in m/s, è $v_{0x} = \frac{160}{3.6} = 44.4\,\frac{m}{s}$, mentre la $v_{0y} = 0$ (essendo la palla lanciata orizzontalmente). Il moto orizzontale può essere considerato rettilineo uniforme, da cui

$$t = \frac{9\,m}{44.4\,\frac{m}{s}} = 0.2\,s$$

nei secondi $9\,m$ il tempo rimarrà invariato, trattandosi appunto di moto rettilineo uniforme;
la caduta è descrivibile mediante le leggi del moto uniformemente accelerato; nei primi $9\,m$ si avrà, con partenza da fermo

$$h_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2^2\,s^2 = 0.2\,m$$

nei metri rimanenti, crescendo la velocità $v_y = gt = 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2\,s = 1.9\,m/s$, si percorrerà una distanza maggiore

$$h_2 = vt + \frac{1}{2}gt^2 = 1.9\,\frac{m}{s} \cdot 0.2\,s + \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2^2\,s^2 = 0.6\,m$$

7

Un proiettile è lanciato con la velocità iniziale di $30\,m/s$ con un alzo di 60 rispetto al piano orizzontale. Calcolare modulo e direzione della sua velocità dopo $2.0\,s$ e dopo $5.0\,s$ dal lancio.

Soluzione:: calcoliamo le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale

$$\begin{aligned} v_{0x} = v_0 \cos\vartheta &= 30\,\frac{m}{s}\cos 60 = 15\,\frac{m}{s} \\ v_{oy} = v_0 \sin\vartheta &= 30\,\frac{m}{s}\sin 60 = 26\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

dopo $2.0\,s$ la sua velocità orizzontale sarà invariata, $v_x(2\,s) = 15\,\frac{m}{s}$, mentre la componente verticale diverrà

$$v_y = v_{0y} - gt = 26\,\frac{m}{s} - 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (2.0)\ s = 6.4\,\frac{m}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + (6.4)^2} = 16\,\frac{m}{s}$$

l'angolo sarà

$$\alpha = \arctan\frac{6.4}{15} = 23$$

sopra il piano orizzontale; dopo $5.0\,s$, la velocità orizzontale è sempre $v_x = 15\,\frac{m}{s}$, quella verticale

$$v_y = v_{0y} - gt = 26\,\frac{m}{s} - 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5.0)\ s = -23\,\frac{m}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + (-23)^2} = 27.5\,\frac{m}{s}$$

l'angolo sarà

$$\alpha = \arctan\frac{27.5}{15} = 61$$

sotto il piano orizzontale.

8

Una pietra viene catapultata con la velocità iniziale di $20\,m/s$ a un angolo di 40.0 rispetto al piano orizzontale. Trovare i suoi spostamenti proiettati in orizzontale e in verticale dopo $1.10\,s$, $1.80\,s$, $5.00\,s$ dopo il lancio.

Soluzione:: calcoliamo le componenti della velocità iniziale lungo le direzioni orizzontale e verticale

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 20\frac{m}{s} \cdot \cos 40.0 = 15.3\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 20\frac{m}{s} \cdot \sin 40.0 = 12.9\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

la distanza percorsa nella direzione può essere calcolata tramite le leggi del moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned} x_1 &= v_{0x}t = 15.3\,\frac{m}{s} \cdot 1.1\,s = 16.8\,m \\ x_2 &= 15.3\,\frac{m}{s} \cdot 1.8\,s = 27.5\,m \\ x_3 &= 15.3\,\frac{m}{s} \cdot 5.00\,s = 76.5\,m \end{aligned}$$

lo spostamento verticale è determinato tramite la legge del moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} y_1 &= v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 12.9\,\frac{m}{s}\cdot 1.1\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.1^2\,s^2 = 8.3\,m \\ y_2 &= 12.8\,\frac{m}{s}\cdot 1.8\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.8^2\,s^2 = 7.3\,m \\ y_3 &= 12.8\,\frac{m}{s}\cdot 5.00\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 5.00^2\,s^2 = -58\,m \end{aligned}$$

il testo non specifica la distanza dal suolo dalla quale la pietra viene scagliata. Se fosse scagliata da terra, il terzo risultato non sarebbe fisicamente significativo, in quanto la pietra avrebbe già urtato il terreno in ricaduta. La pietra, in tale ipotesi, urta il terreno dopo aver percorso

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta_0}{g} = \frac{20^2 \sin 80}{9.8} = 40.2\,m$$

ciò indica che, in questo caso, anche lo spostamento orizzontale x_3 non è plausibile, avendo la pietra già urtato il terreno, definendo una distanza orizzontale massima di $40.2\,m$; in tal caso dopo $5.00\,s$ lo spostamento verticale è nullo.

9

Una palla viene lanciata dall'alto di un colle con la velocità iniziale di $15\,m/s$ a un angolo di 20.0 sotto il piano orizzontale. Trovare il suo spostamento proiettato sul piano orizzontale e sull'asse verticale $2.30\,s$ dopo il lancio.

Soluzione:: calcoliamo le componenti della velocità iniziale lungo le direzioni orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 15\cos 20.0 = 14.1\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 15\sin 20.0 = -5.1\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

(il segno negativo di v_{oy} dipende dal fatto che la palla viene lanciata sotto il piano orizzontale) la palla ha uno spostamento in orizzontale costante nel tempo

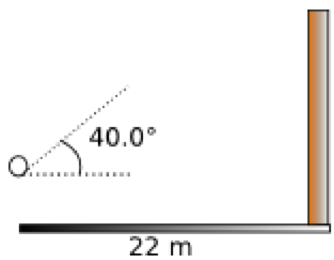
$$x = v_{0x}t = 14.1\,\frac{m}{s}\cdot 2.30\,s = 32.4\,m$$

lo spostamento lungo la direzione verticale è descrivibile con un moto uniformemente accelerato (caduta libera in assenza di attriti)

$$y = -5.1\,\frac{m}{s}\cdot 2.30\,s - \frac{1}{2}9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot (2.30)^2\ s^2 = -37.6\,m$$

10

Una palla viene lanciata direttamente contro un muro con la velocità iniziale di $25.0\,m/s$ a un angolo di 40.0 rispetto al suolo orizzontale, come indicato in figura. Il muro si trova a $22.0\,m$ dal punto di lancio. (a) Per quanto tempo rimane in aria la palla prima di colpire la parete? (b) Quanto più in alto del punto di lancio colpisce la parete? (c) Quali sono le componenti orizzontale e verticale della sua velocità all'istante in cui colpisce la parete? (d) In questo istante ha già superato il vertice della traiettoria?



Caso: (a): il tempo di volo prima di colpire il muro è quello durante il quale la palla percorre i $22.0\,m$ che la separano dal muro stesso. Calcoliamo prima le componenti della velocità

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 25.0\,\frac{m}{s}\cdot\cos 40.0 = 19.2\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 25.0\,\frac{m}{s}\cdot\sin 40.0 = 16.1\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

É possibile calcolare il tempo attraverso la componente orizzontale, che appunto indica lo spostamento verso il muro

$$t = \frac{s}{v_{ox}} = \frac{22.0\,m}{19.2\,\frac{m}{s}} = 1.15\,s$$

Caso: (b): Il punto in cui colpisce la parete al di sopra del punto di lancio, dipende dalla variazione della componente verticale della velocità, nel tempo di $1.15\,s$

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 16.1\,\frac{m}{s}\cdot 1.15\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.15^2\,s^2 = 12.0\,m$$

Caso: (c): calcoliamo la velocità nell'istante in cui la palla colpisce la parete. La componente orizzontale non subisce alcuna variazione, in condizioni ideali, e pertanto sarà

$$v_x = v_{0x} = 19.2\,\frac{m}{s}$$

la componente verticale varia invece secondo le leggi della caduta di un grave

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

da cui

$$v_y = \sqrt{\left(16.1\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 12\,m} = 4.9\,\frac{m}{s}$$

Caso: (d): il moto complessivo è descrivibile attraverso una parabola. Il punto più in alto coincide geometricamente con il vertice di tale parabola. Dalla equazione del moto $y = x\tan\vartheta_0 - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$ con ϑ_0 angolo iniziale rispetto alla direzione orizzontale, si ricava l'ascissa del vertice, cioè lo spostamento in orizzontale che confronteremo con la distanza tra palla e muro. L'ascissa del vertice

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2\sin 2\vartheta_0}{2g} = \frac{\left(25\,\frac{m}{s}\right)^2\sin 80.0}{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 31.4\,m$$

essendo la distanza tra palla e parete di $22\,m$, dopo $1.15\,s$ la palla è ancora in fase di salita.
La risposta si può dare anche confrontando i tempi, in quanto il punto di massimo corrisponde a quello in cui la velocità si annulla (in fase di salita la velocità ha segno positivo, che si inverte quando la palla inizia a scendere per il prevalere della gravità. Tra queste due fasi la velocità si annullerà appunto nel vertice della traiettoria parabolica). Quindi da

$$v_y = v_{0y} - gt$$

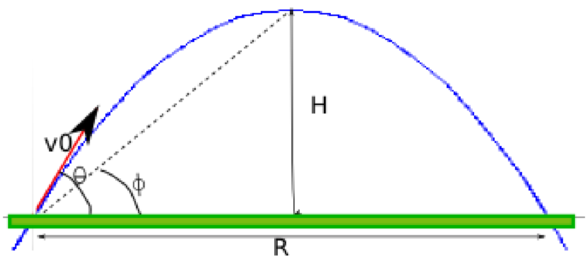
dovendo essere $v_y = 0$, si ha

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{16.1\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 1.64\,s$$

anche in questo caso, il tempo è superiore al tempo necessario a colpire il muro di $1.15\,s$, e ciò indica ancora come la palla sia in fase di salita.

11

Dimostrare che, per un proiettile sparato da un terreno piano a un angolo ϑ_0 rispetto all'orizzontale, il rapporto fra la massima altezza H e la gittata R è dato dall'espressione $H/R = \frac{1}{4}\tan\vartheta_0$. Per quale angolo si ha $H = R$?



Soluzione:: La relazione che esprime il punto di massima altezza, cioè il punto in cui $v_y = v_0\sin\vartheta_0 = 0$, è

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\vartheta_0}{2g}$$

mentre la gittata, distanza tra punto di partenza e di ricaduta, cioè nel modello geometrico la distanza tra le intersezioni della parabola con l'asse orizzontale, è espressa da

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\vartheta_0}{g} = \frac{2v_0^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{g}$$

il loro rapporto sarà pertanto

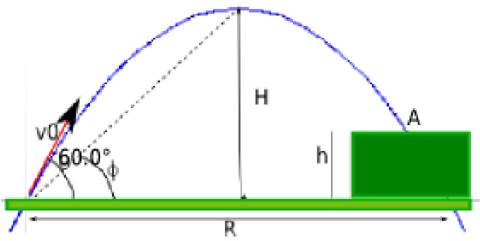
$$\frac{H}{R} = \frac{\frac{v_0^2\sin^2\vartheta_0}{2g}}{\frac{2v_0^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{g}} = \frac{v_0^2\sin^2\vartheta_0}{2g}\cdot\frac{g}{2v_0^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0} = \frac{1}{4}\tan\vartheta_0$$

Se $H = R$, allora il rapporto $\frac{H}{R} = 1$, cioè $\frac{1}{4}\tan\vartheta_0 = 1$. Risolvendo la equazione goniometrica elementare, si ha

$$\vartheta_0 = \arctan 4 = 76$$

12

Una pietra viene proiettata verso un terrapieno di altezza h con la velocità iniziale di $42.0\,m/s$ a un angolo di 60.0 rispetto al suolo orizzontale (vedi figura). La pietra cade in A, $5.50\,s$ dopo il lancio. Trovare l'altezza h del terrapieno; la velocità della pietra subito prima dell'urto col terreno e la massima altezza H sopra il suolo raggiunto dalla pietra.



Soluzione:: utilizziamo la legge che descrive il moto parabolico della pietra. Nel tempo $t = 5.50\,s$, la pietra percorre in orizzontale la distanza

$$x = v_0\cos\vartheta_0 t = 42.0\,\frac{m}{s}\cdot\cos 60.0\cdot 5.50\,s = 115.5\,m$$

e in verticale

$$y = v_0\sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 42.0\,\frac{m}{s}\cdot\sin 60.0\cdot 5.50\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot\left(5.50\,\frac{m}{s}\right)^2 = 51.8\,m$$

Prima dell'urto con il terrapieno la velocità si otterrà sommando vettorialmente la velocità orizzontale, costante, con quella diretta verticalmente

$$\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\vartheta_0 = 42.0\,\frac{m}{s}\cdot\cos 60.0 = 21\,\frac{m}{s} \\ v_y &= v_0\sin\vartheta_0 - gt = 42.0\,\frac{m}{s}\cdot\sin 60.0 - 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 5.50\,s = -17.5\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

la velocità sarà quindi

$$v = \sqrt{21^2 + (-17.5)^2} = 27.3\,\frac{m}{s}$$

la massima altezza raggiunta è espressa da

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\vartheta_0}{2g} = \frac{\left(42.0\,\frac{m}{s}\right)^2\sin^2 60.0}{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 67.5\,m$$

13

La velocità di lancio di un proiettile è cinque volte maggiore della velocità che esso raggiunge alla massima altezza. Calcolare l'angolo di elevazione del lancio.

Soluzione:: la velocità di lancio non è altro che la velocità iniziale v_0. Inoltre, nel punto di massima altezza, la componente verticale $v_y = 0$. Pertanto

$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt = 0$$

cioè, la velocità nel punto di massima altezza è espressa dalla sola componente orizzontale

$$v_x = v_{0x} = v_0\cos\theta_0$$

e questa sarà un quinto della velocità iniziale; quindi

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 5v_{0x}$$

elevando al quadrato e sommando i termini simili, si ottiene

$$24v_{0x}^2 = v_{oy}^2$$

ma il rapporto $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\theta_0$, per cui

$$\theta_0 = \arctan\left(\sqrt{24}\right) = 78.5$$